

Mémoire pour l'activité Informatique débranchée : Tours de Hanoi
Année scolaire 2019-2020

Luc Lapointe

Sommaire

1 Principe de l'activité	2
2 Fiche d'activité	3
3 Annexe	5
L'algorithme pour la séance 2	5
Qu'est-ce que la récursivité	6
Conception du matériel	7
Séquence 1	8
Séquence 1 : correction	13
Séquence 2	18
Séquence 2 : correction	22

1 Principe de l'activité

Public visé : Dès la primaire

Temps envisagé : 45 mn - 1h

Règles du jeu

Le jeu des *Tours de Hanoï* consiste à déplacer des disques de diamètres différents d'un piquet « de départ » à un piquet « d'arrivée » en passant par un piquet « intermédiaire » tout en respectant les règles suivantes :

- On ne peut déplacer qu'un disque à la fois,
- On ne peut déplacer un disque que sur un autre plus grand que lui ou sur un emplacement vide.

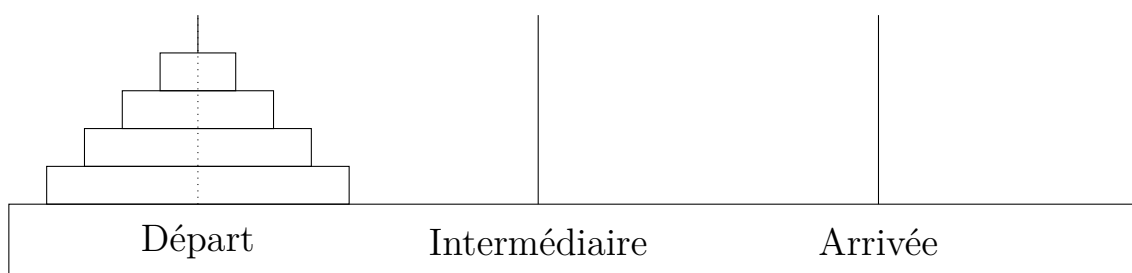


Schéma de la configuration initiale avec quatre disques.

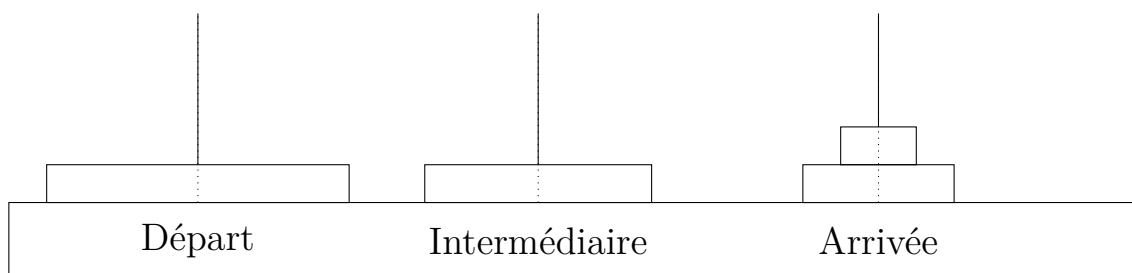
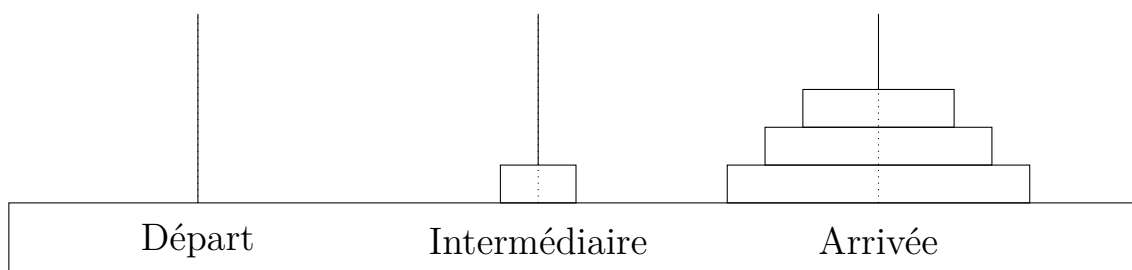


Schéma d'une configuration possible après quatre coups.



Ici, il ne reste plus qu'à déplacer le petit disque à droite pour atteindre la position finale !

Déroulement de l'activité

Lors de mes interventions, je viendrai avec assez de supports physiques pour que les élèves puissent s'essayer au jeu par groupes de trois à cinq. Je les laisserai d'abord essayer de résoudre le problème pour deux disques, puis trois, puis quatre... tout en les faisant compter le nombre de déplacements de disques nécessaires. Puis je ferai réfléchir la classe à une manière efficace de résoudre le problème, en évitant les déplacements superflus par exemple.

Liens avec l'informatique

Ce jeu, très connu dans le milieu de l'informatique, est une manière ludique d'illustrer la *récurtivité*, qui est une méthode de programmation où les programmes s'appellent eux-mêmes. Ce principe n'est pas celui que j'expliquerai, car trop conceptuel pour être travaillé en primaire. Je ferai plutôt en sorte que les élèves découvrent par eux-mêmes des *fonctions*, voire des *algorithmes* extrêmement simplifiés. Ces deux notions, qui ont une place centrale en informatique, seront ainsi à leur portée !

2 Fiche d'activité

Public visé : Fin de primaire

Temps envisagé : Deux séances de 50 mn - 1h

Note : Pour la rédaction de cette fiche, j'écris "je" pour désigner ce que je fais, mais ça désigne aussi ce que peut faire n'importe quel adulte animant l'activité (notamment s'il y en a plusieurs).

Séance 1

Matériel : Six ensembles de Tours de Hanoï en bois, que je rapporte.

Durée	Phase	Activité
5mn	Introduction	« Je suis venu vous parler d'informatique aujourd'hui. Mais avant ça, j'aimerais savoir s'il y en a parmi vous qui savent ce que c'est ? » et rebondir sur les mots proposés. Puis « Je vais vous présenter un jeu... »
5mn	Présentation des règles	Présentation des règles en montrant le matériel mais avant de le distribuer, afin de garder l'attention des élèves. Règles notées au tableau. Je fais également une démonstration des règles avec deux disques.
15mn	Constitution des groupes d'élèves, distribution du matériel, assemblage et premières manipulations	Déplacer les tables pour les regrouper par îlots si ce n'est pas déjà fait. Je distribue des tours avec trois disques à chaque groupe. Les élèves commencent par s'attaquer au problème en autonomie. Je passe dans les rangs afin de regarder ce que les élèves font, et donne plus de disques aux groupes qui réussissent. Ceux qui réussissent peuvent compter et essayer de réussir avec le moins de coups possibles.
10mn	Premiers retours, explications de la suite	Je donne la parole aux élèves qui veulent parler de ce qu'ils ont fait. Je les fait comparer les nombres de coups entre les différents groupes. Puis je leur explique une notation pour décrire les déplacements : "1 → 3" pour déplacer le disque en haut du piquet 1 vers le piquet 3 par exemple.
10mn	Suite des manipulations	Je demande aux élèves de noter leurs déplacements pour le problème à deux disques, trois, quatre... Puis, quand ils l'ont fait, j'échange les feuilles entre les tables, et leur demande de rejouer la séquence de leurs voisins, voire l'améliorer.
5mn	Deuxième bilan	Avez-vous compris les instructions de vos camarades ? Est-ce qu'elles permettent de résoudre le problème ? Les avez-vous améliorées ?
Temps restant	Conclusion, teasing de la suite	En suivant des instructions, pas besoin de réfléchir. C'est exactement ce que sait faire un ordinateur ! La prochaine fois, je vous demanderai de suivre des instructions, mais qui permettront de résoudre le problème avec plus de disques.

Séance 2

Matériel : Six ensembles de Tours de Hanoï en bois, que je rapporte. Des feuilles avec des instructions écrites dessus.

Durée	Phase	Activité
5mn	Introduction	« Coucou, vous vous souvenez de moi ? Des tours de Hanoï ? », demander à quelqu'un de rappeler les règles, les noter au tableau. Demander de rappeler la notation, la noter aussi. Leur donner un petit coup de pouce si ils s'en souviennent pas !
5mn	Explication de la suite	Je vais distribuer des feuilles avec les instructions pour résoudre le problème. Certaines seront justes, certaines seront fausses. Je ne leur dis pas qu'il y aura celles qui résolvent le problème pour deux, trois et quatre disques dedans. Ils devront identifier ce qu'elles font en dessinant la position après avoir appliqué les instructions. (cf séquence 1 en annexe)
10mn	Application	Les élèves commencent à exécuter les instructions sur les fiches. Je passe dans les rangs afin de regarder ce qu'ils font. J'aide ceux en difficulté, réponds aux questions.
10mn	Premiers retours, explications de la suite	« Suivre des instructions, ça marche bien ? C'est facile ? Est-ce qu'il faut beaucoup d'instructions ? » Puis : « Il y a plusieurs manières de raccourcir la liste d'instructions. » Je leur distribue des feuilles avec des instructions renvoyant aux fiches "séquences 1" qu'ils ont déjà remplies. (cf séquence 2 en annexe)
15mn	Suite des manipulations	Je distribue les feuilles, puis passe dans les rangs. Aux groupes qui réussissent bien, je donne une feuille décrivant un algorithme simple pour résoudre le problème. (cf en annexe pour l'algorithme)
5mn	Deuxième bilan	« Avez-vous réussi à appliquer ces instructions ? Est-ce qu'elles marchent ? Est-ce que ça fait faire la même chose que celles où tout est écrit en entier ? »
Temps restant	Conclusion	Les instructions "versions courtes" que j'ai données peuvent aussi être données à un ordinateur. Comme on peut avoir à résoudre des problèmes avec beaucoup d'instructions, on préfère trouver des moyens de "créer" les instructions plutôt que d'avoir à tout écrire à la main. C'est ça, entre autres, que font les informaticiens !

3 Annexe

Contenu de l'annexe :

1. L'algorithme itératif utilisé lors de la séance 2
2. Une présentation de ce qu'est la récursivité
3. Une présentation de la conception du matériel
4. Mes échanges avec l'enseignante
5. Les fiches vierges "séquence 1" à utiliser lors de la première manipulation par les élèves de la séance 2
6. La version corrigée de ces fiches
7. Les fiches vierges "séquence 2" à utiliser lors de la deuxième manipulation de la même séance par les élèves
8. La version corrigée de ces fiches

3.1 L'algorithme pour la séance 2

Voici l'énoncé de l'algorithme en pseudo-code, en fonction du nombre de disques.

Dans ces algorithmes, déplacer à "droite" ou à "gauche" suppose qu'on fait face aux trois piquets, numérotés de 1 à 3 de gauche à droite. Quand on dépasse un bord, on revient de l'autre côté. Déplacer d'un cran à droite à partir de 3 amène donc à 1, et déplacer un cran à gauche à partir de 1 amène donc à 3.

Algorithme 1 Tours de Hanoï pour un nombre **impair** de disques

tant que le problème n'est pas résolu **faire**

 Déplacer le petit disque d'un cran à gauche.

 Déplacer le seul autre disque déplaçable vers le seul emplacement disponible.

fin tant que

Algorithme 2 Tours de Hanoï pour un nombre **pair** de disques

tant que le problème n'est pas résolu **faire**

 Déplacer le petit disque d'un cran à droite.

 Déplacer le seul autre disque déplaçable vers le seul emplacement disponible.

fin tant que

Le principe d'une boucle **tant que**, appelée couramment boucle **while** (qui est sa traduction en anglais) est le suivant :

1. On regarde si la condition après "tant que" est vérifiée.
2. Si oui, on réalise le contenu de la boucle, puis on retourne au point 1.
3. Si non, on sort de la boucle.

L'idée de pourquoi ces algorithmes marchent n'est pas forcément très intuitive. Grossièrement, il faut à la fois essayer de dégager le prochain "gros disque" à déplacer, et ne jamais faire deux mouvements qui s'annulent. Ces algorithmes donnent par ailleurs le nombre minimal de coups pour résoudre le problème, car ils ne font jamais s'annuler un coup.

Pour ce qui est de la distinction entre le déplacement à gauche et à droite en fonction de la parité du nombre de disques, elle est faite juste pour déplacer la pile de disques de 1 à 3. Sans cette distinction, la pile de disques serait déplacée de 1 à 2 parfois.

Pour éviter d'évoquer la notion de parité, on peut évoquer la couleur de la gommette du plus gros disque, ou expliciter les nombres ("pair" → 2, 4 ou gros disque de couleur froide; "impair" → 1, 3, 5 ou gros disque de couleur chaude).

Les algorithmes utilisant des boucles **tant que** sont dits *itératifs*, par opposition aux algorithmes *récursifs* que nous verrons plus bas. Les algorithmes itératifs sont les plus simples à comprendre, et sont souvent énoncés sous des formes très proches du français de tous les jours pour initier des novices à la lecture d'algorithmes. Le nom vient du fait que dans ces algorithmes, on *itère* des instructions un certain nombre de fois, c'est à dire qu'on les répète.

3.2 Qu'est-ce que la récursivité

Les tours de Hanoï permettent d'introduire de manière ludique la *récursivité*, qui est une méthode de conception d'algorithmes. Intuitivement, la récursivité est utile quand, quand on sait résoudre un problème d'une certaine difficulté, on peut en déduire une solution pour un problème légèrement plus dur. Ici, on considère le problème : "Bouger un certain nombre de disques d'un piquet à un autre". Ce problème, tel qu'énoncé, est très dur pour des grandes valeurs. Par exemple, "Bouger 1000 disques du piquet 1 au piquet 3" est très compliqué. Par contre, si on sait bouger 999 disques d'un piquet à un autre, on peut procéder de la manière suivante :

1. Bouger les 999 disques du dessus du piquet 1 au piquet 2
2. Bouger le gros disque du piquet 1 au piquet 3
3. Bouger les 999 disques du piquet 2 au piquet 3

Pour ce jeu des tours de Hanoï, le gros disque resté sur le piquet 1 ne bloque aucun mouvement de la solution pour bouger les 999 disques du dessus, car tous ces disques sont plus petits. C'est donc une manière qui fonctionne de procéder. La récursivité est une méthode de conception d'algorithmes compliquée, car parfois elle peut mener à de fausses solutions, par exemple :

1. Bouger le plus petit disque du piquet 1 au piquet 2
2. Bouger les 999 disques du piquet 1 au piquet 3
3. Bouger le petit disque du piquet 2 au piquet 3

Cette solution ne fonctionne pas, car la solution qu'on a pour 999 disques suppose qu'on peut déplacer n'importe quel disque sur n'importe quel piquet, si on ne prend pas en compte les règles d'empilement de disques. Or, dans la méthode décrite, aucun disque ne peut être déplacé sur le petit disque au piquet 2 lors de l'étape 2.

La question que vous vous posez peut-être à ce stade là est :

"Certes, mais le problème pour 999 disques n'est pas plus facile!"

Eh bien en fait, ce problème pour 999 disques est *un tout petit peu* plus facile. Avec cette méthode, on peut s'appuyer sur la résolution pour 998 disques, qui s'appuyera sur celle de 997 disques... jusqu'à arriver à la résolution dans le cas d'un unique disque.

La récursivité peut être très laborieuse quand elle est appliquée par des humains. Une ébauche de récursivité applicable par des humains est donnée dans la fiche pour déplacer 5 disques du piquet 1 au piquet 3. On voit que même avec 5 disques, il y a déjà beaucoup d'instructions à appliquer, et le risque d'erreur humaine est élevé. Par contre, un ordinateur n'a aucune difficulté à se souvenir de tout ça !

Pour le cas des tours de Hanoï, ça donnerait l'algorithme récursif suivant, qui reprend la notation des fiches, et la première méthode décrite pour 1000 disques. Une "procédure" est une méthode qui permet de faire quelque chose de précis. On peut aussi dire une "fonction". Ici, la procédure $\text{Hanoï}(n, a, c)$ donne la liste d'instructions pour déplacer n disques du piquet a au piquet c , où n peut être remplacé par n'importe quel nombre et a et c peuvent être remplacés par deux nombres différents entre 1 et 3.

Algorithme 3 Hanoï récursif

procédure HANOÏ(n, a, c)

si $n = 1$ **alors**

$a \rightarrow c$

sinon

 Soit b le troisième piquet.

 Hanoï($n - 1, a, b$)

$a \rightarrow c$

 Hanoï($n - 1, b, c$)

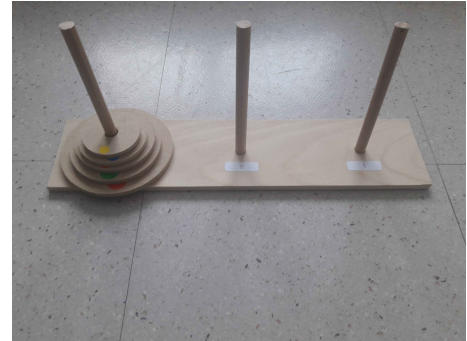
fin si

fin procédure

Les algorithmes récursifs permettent d'écrire de manière très compacte des programmes autrement très long à écrire, et sont très utilisés en informatique. Écrire des programmes courts est d'ailleurs une très bonne chose en informatique, car ça limite beaucoup la difficulté de compréhension des programmes et le risque de bugs, pour peu que les raccourcis employés ne soient pas trop incompréhensibles.

3.3 Conception du matériel

Il existe des ensembles de "tours de Hanoi" préconçus achetables dans le commerce. Certains jouets pour bébés y ressemblent d'ailleurs, mais ont plus tendance à être en plastique coloré qu'en bois. J'ai personnellement choisi de concevoir mon propre matériel, en bois. J'ai donc construit six ensembles :

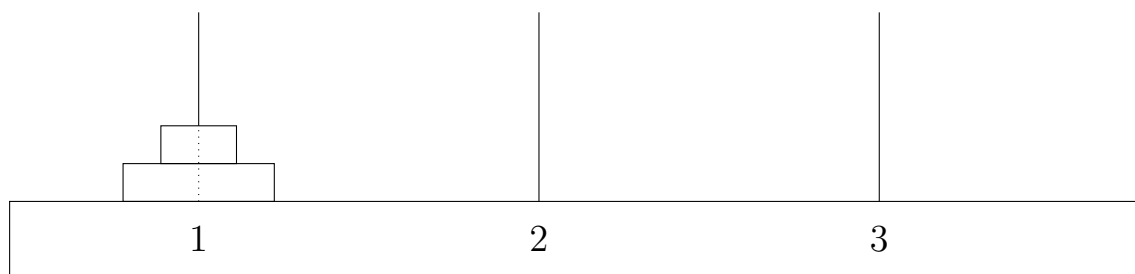


Les disques et les socles ont été découpés à partir de planches de bois achetées en magasin de bricolage, et les piquets à partir de longues tiges également achetées en magasin de bricolage. Pour ce qui est de la découpe des piquets et des socles, j'ai utilisé une scie. Pour la découpe des disques, j'ai utilisé des scies à cloche de différents diamètres comme embouts d'une perceuse. Pour les trous dans les disques, j'ai également utilisé une mèche à fixer sur une perceuse. Le diamètre de la mèche doit être adapté au diamètre des piquets.



Fiche 1

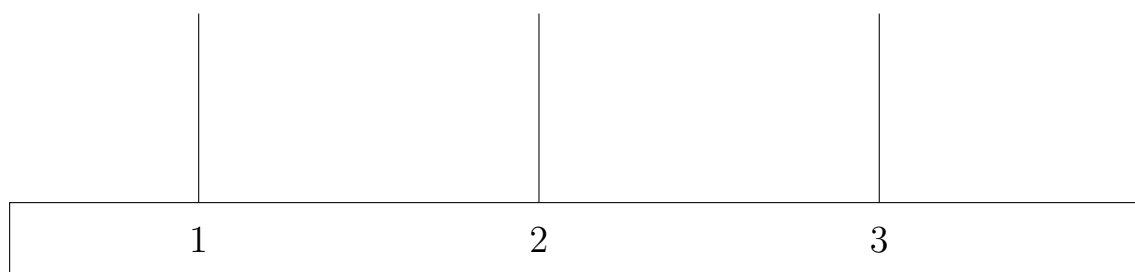
Départ



Instructions

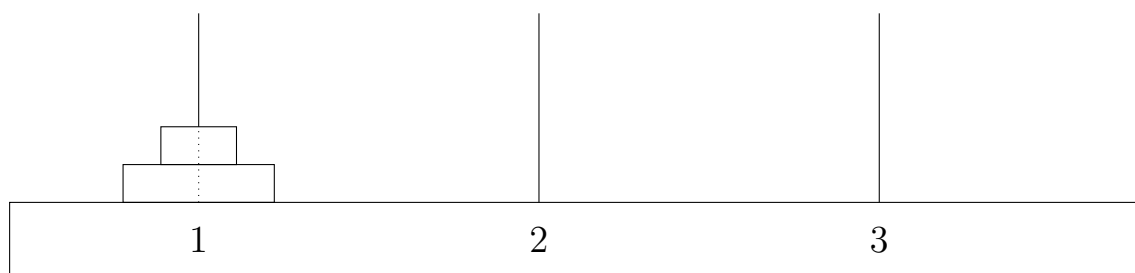
$1 \rightarrow 2; 2 \rightarrow 3$

Fin (Il faut dessiner les disques après le dernier mouvement ! ☺)



Fiche 2

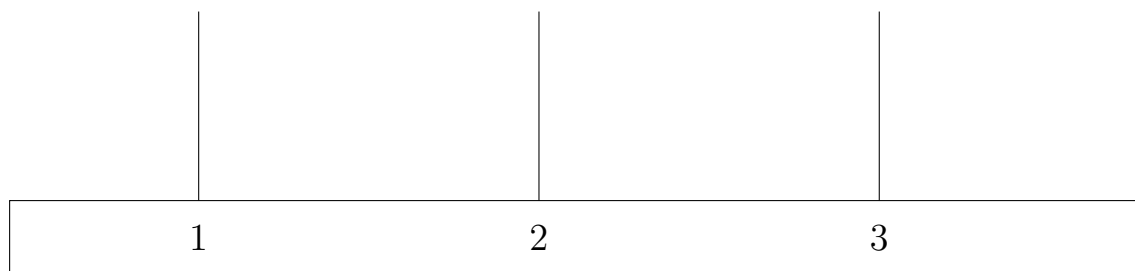
Départ



Instructions

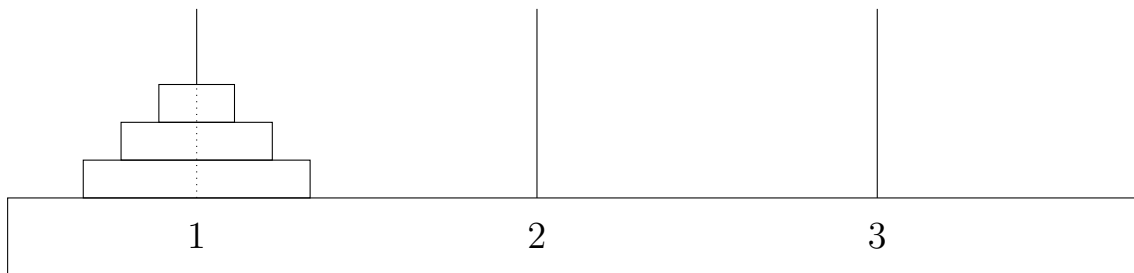
$1 \rightarrow 2; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 2; 3 \rightarrow 1; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 3$

Fin (Si vous avez réussi !)



Fiche 3

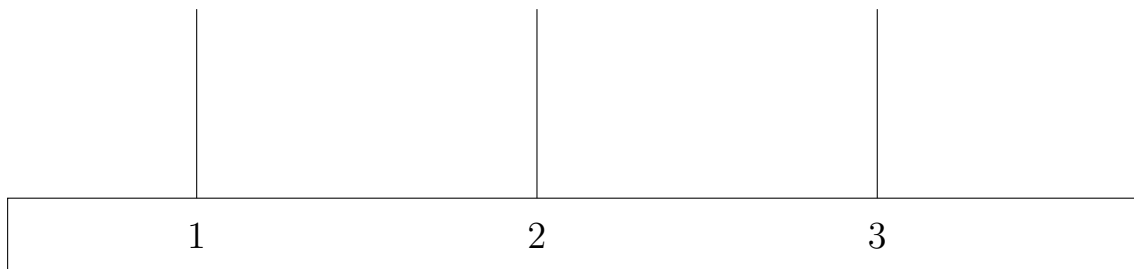
Départ



Instructions, avec peut-être une faute dedans ?

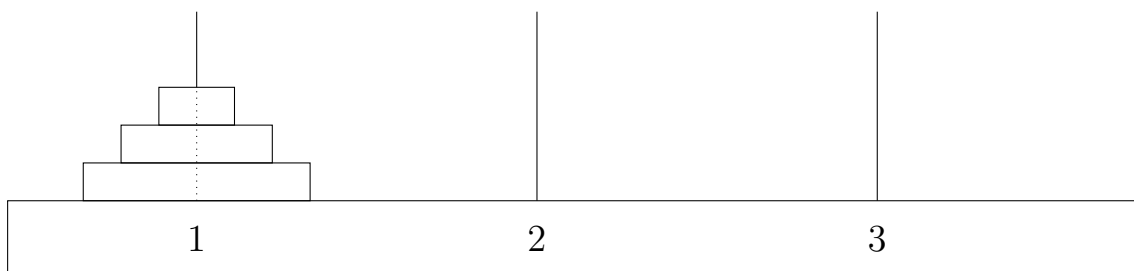
$1 \rightarrow 2$; $1 \rightarrow 3$; $1 \rightarrow 3$; $2 \rightarrow 3$

Fin (Est-ce qu'il y a eu une erreur ?)



Fiche 4

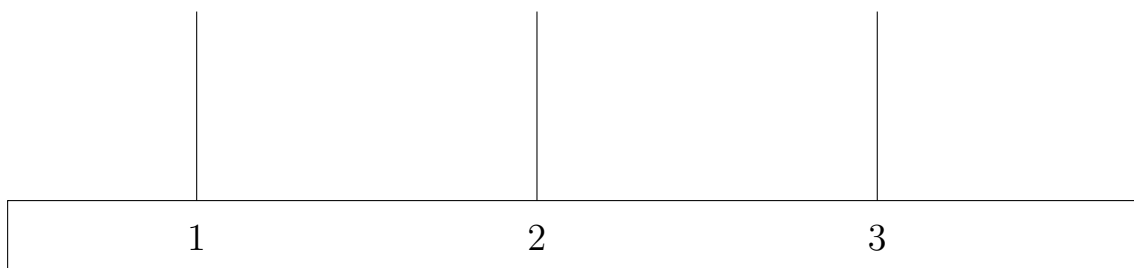
Départ



Instructions

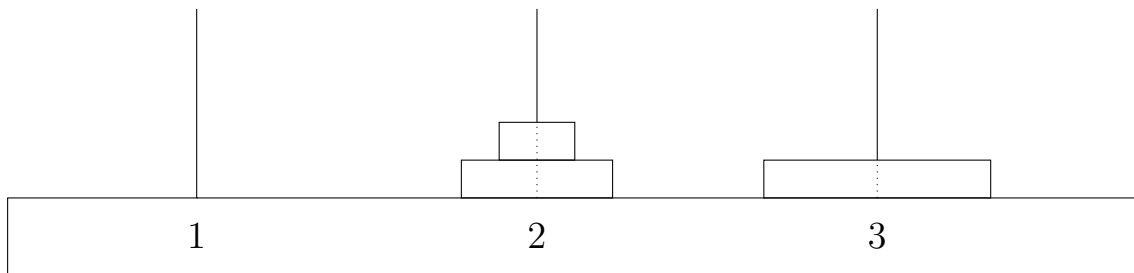
$1 \rightarrow 3$; $1 \rightarrow 2$; $3 \rightarrow 2$; $1 \rightarrow 3$

Fin (Peut-être que cette position servira de départ pour une autre fiche plus tard ?)



Fiche 5

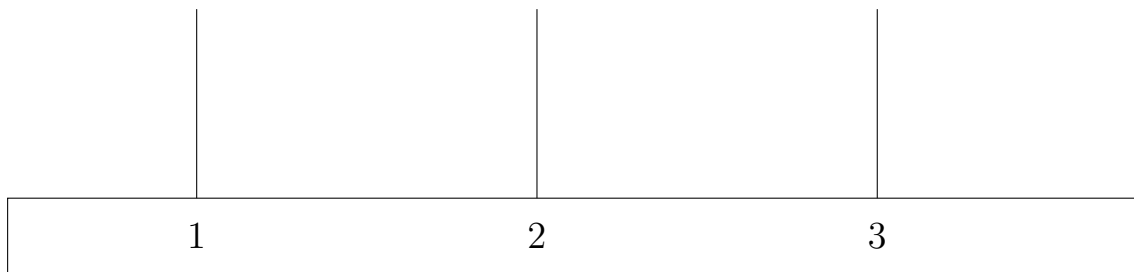
Départ



Instructions (Attention aux erreurs!)

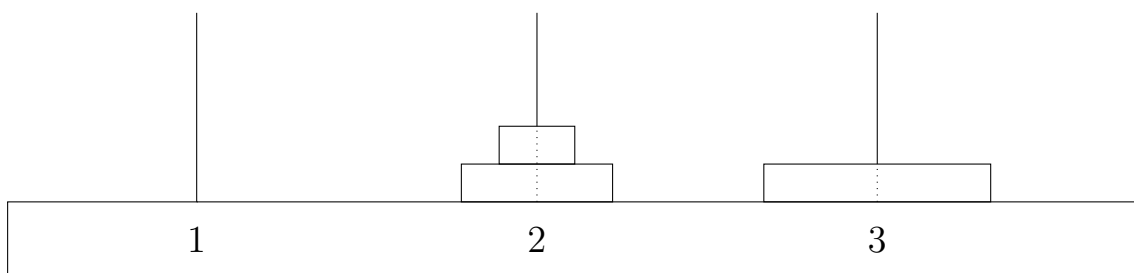
$2 \rightarrow 3$; $2 \rightarrow 3$

Fin (Est-ce qu'il y a eu un problème?)



Fiche 6

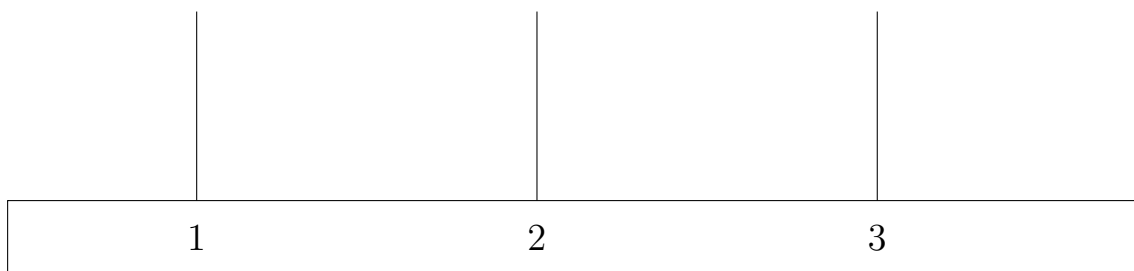
Départ



Instructions

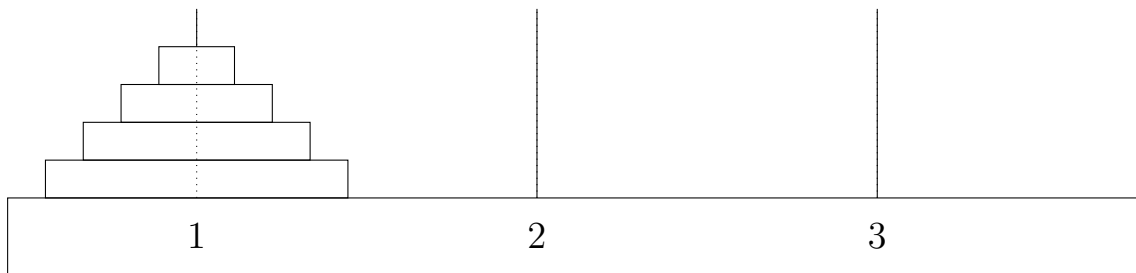
$2 \rightarrow 3$; $2 \rightarrow 1$; $3 \rightarrow 2$; $1 \rightarrow 3$; $2 \rightarrow 3$

Fin



Fiche 7

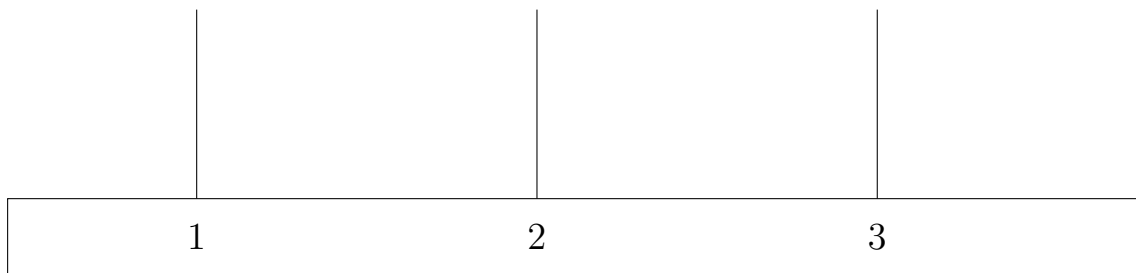
Départ



Instructions

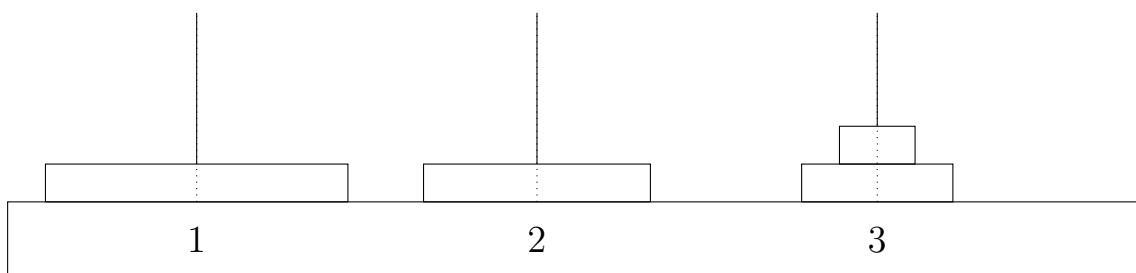
$1 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 2$

Fin



Fiche 8

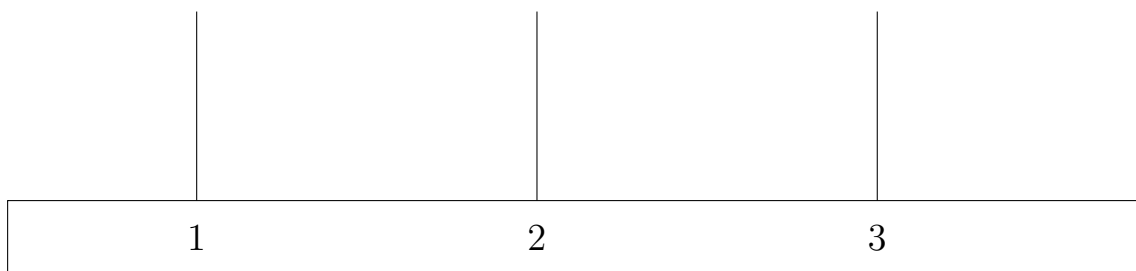
Départ



Instructions

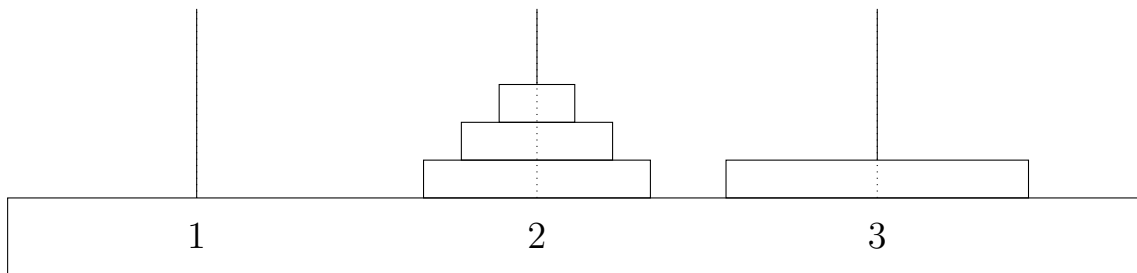
$3 \rightarrow 1; 3 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3$

Fin



Fiche 9

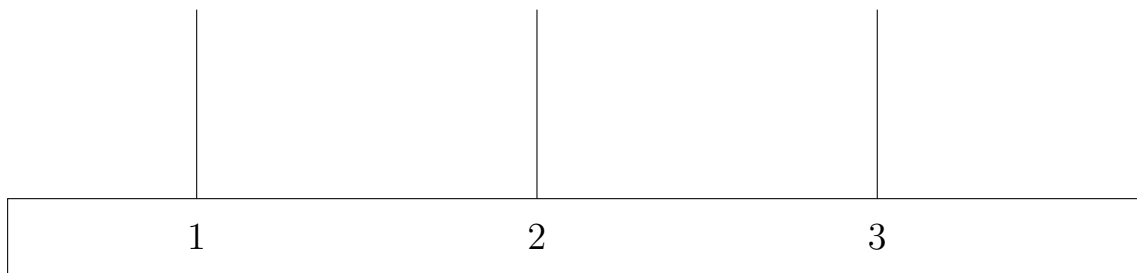
Départ



Instructions

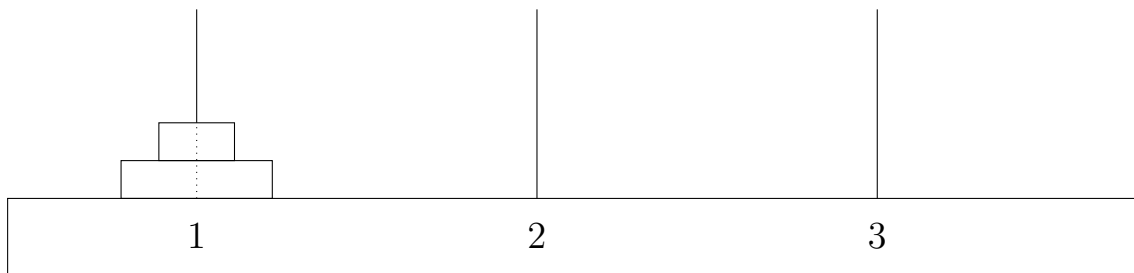
$2 \rightarrow 3$; $2 \rightarrow 1$; $3 \rightarrow 1$; $2 \rightarrow 3$; $1 \rightarrow 2$; $1 \rightarrow 3$; $2 \rightarrow 3$

Fin



Fiche 1 : correction

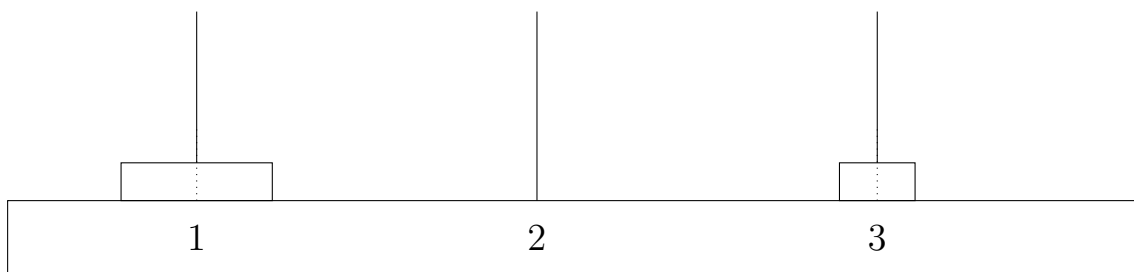
Départ



Instructions

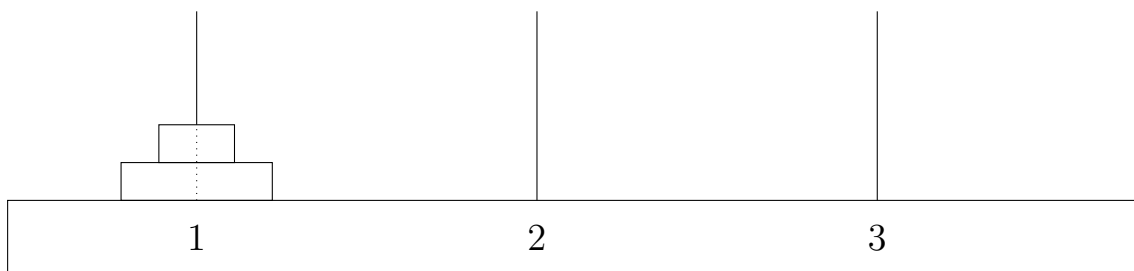
$1 \rightarrow 2; 2 \rightarrow 3$

Fin (Il faut dessiner les disques après le dernier mouvement ! ☺)



Fiche 2 : correction

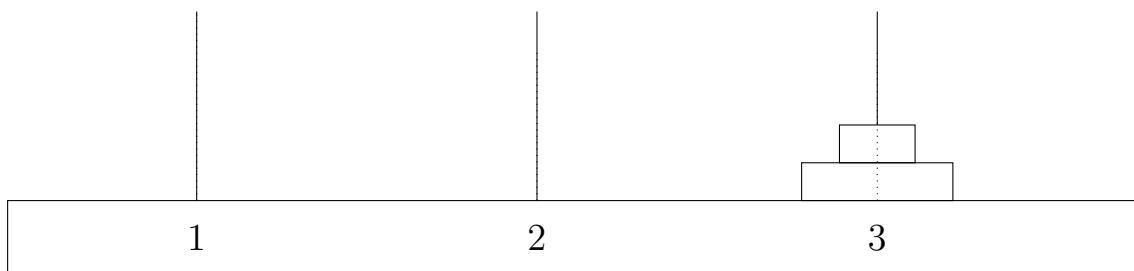
Départ



Instructions

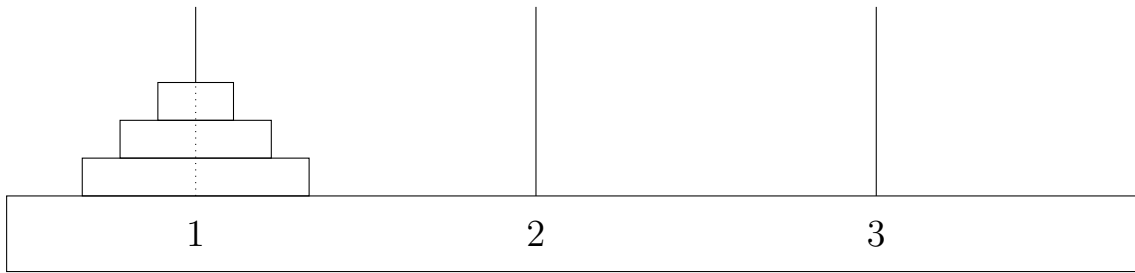
$1 \rightarrow 2; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 2; 3 \rightarrow 1; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 3$

Fin (Si vous avez réussi !)



Fiche 3 : correction

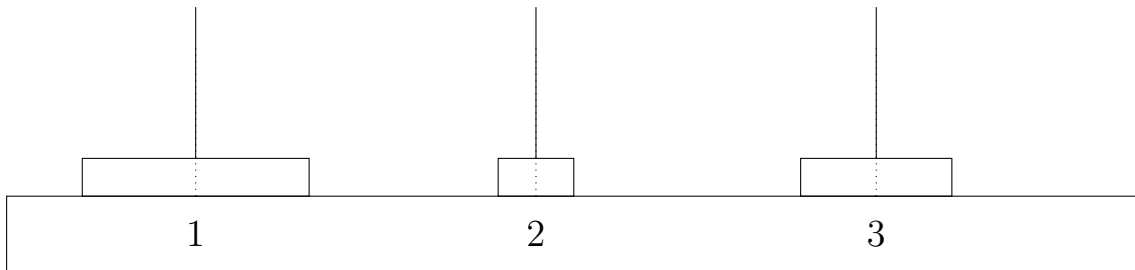
Départ



Instructions, avec peut-être une faute dedans ?

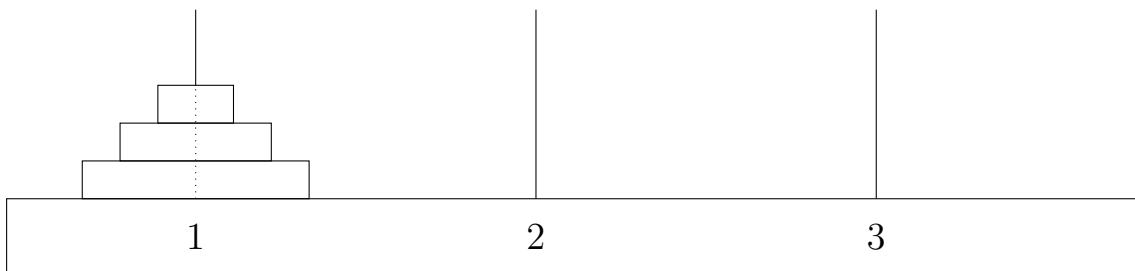
$1 \rightarrow 2$; $1 \rightarrow 3$; $1 \rightarrow 3$; $2 \rightarrow 3$

Fin avant l'erreur (Est-ce qu'il y a eu une erreur ? oui ☹)



Fiche 4 : correction

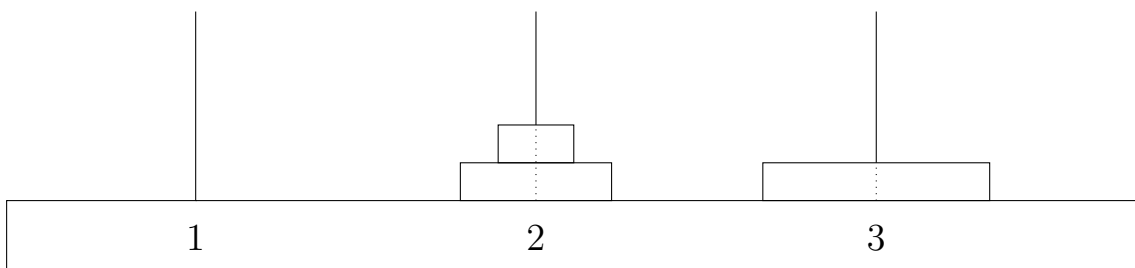
Départ



Instructions

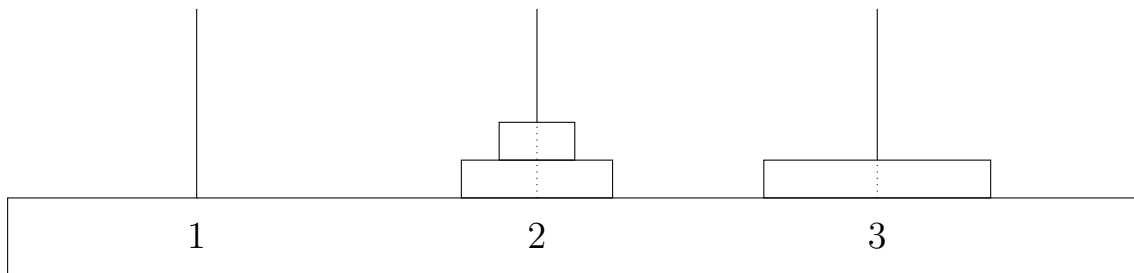
$1 \rightarrow 3$; $1 \rightarrow 2$; $3 \rightarrow 2$; $1 \rightarrow 3$

Fin (Peut-être que cette position servira de départ pour la fiche suivante ?)



Fiche 5 : correction

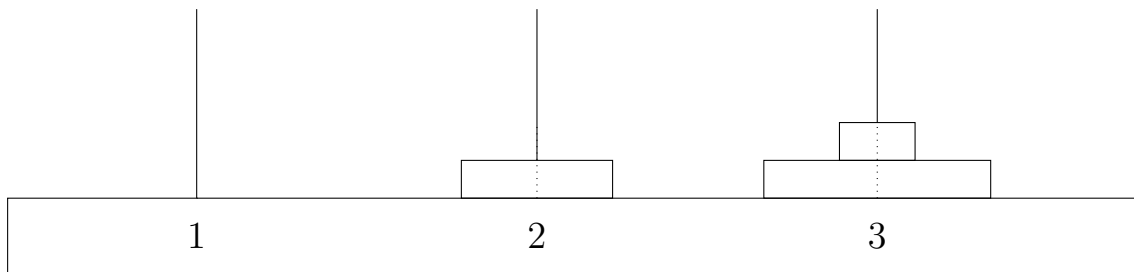
Départ



Instructions (Attention aux erreurs!)

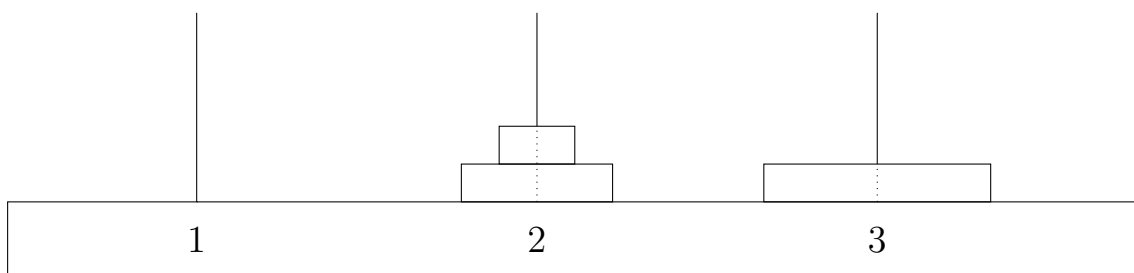
$2 \rightarrow 3$; $2 \rightarrow 3$

Fin avant l'erreur (Est-ce qu'il y a eu un problème? **Oui!**)



Fiche 6 : correction

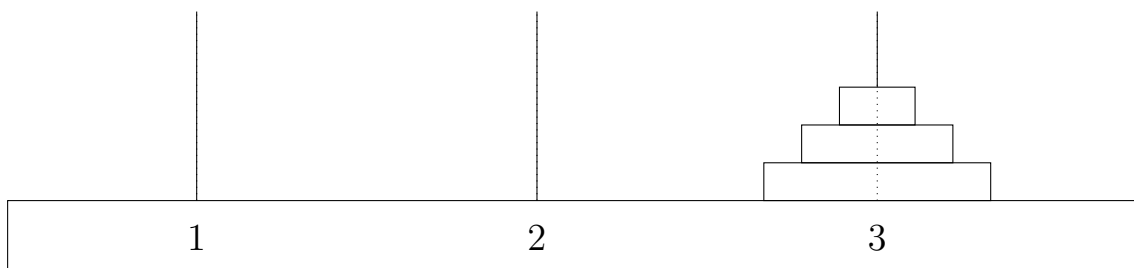
Départ



Instructions

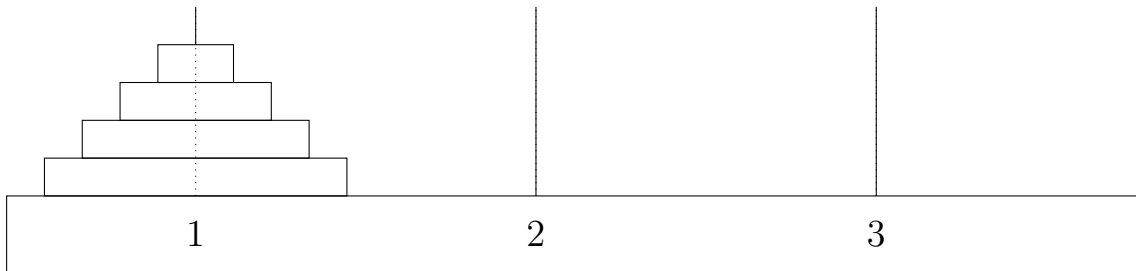
$2 \rightarrow 3$; $2 \rightarrow 1$; $3 \rightarrow 2$; $1 \rightarrow 3$; $2 \rightarrow 3$

Fin



Fiche 7 : correction

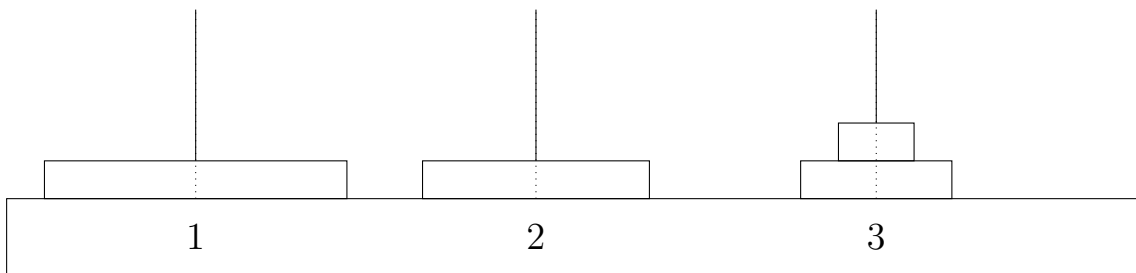
Départ



Instructions

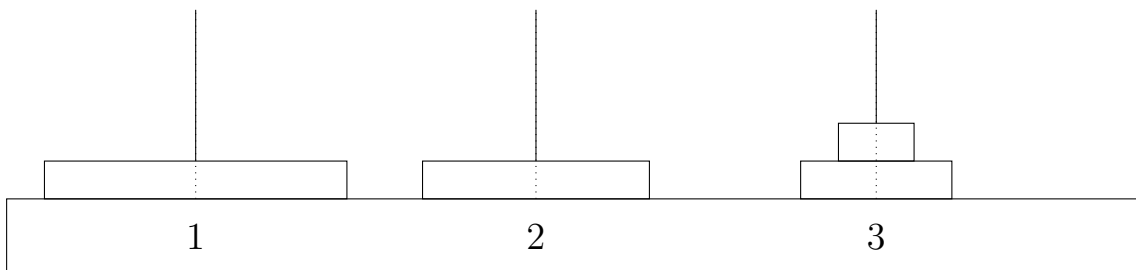
$1 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 2$

Fin



Fiche 8 : correction

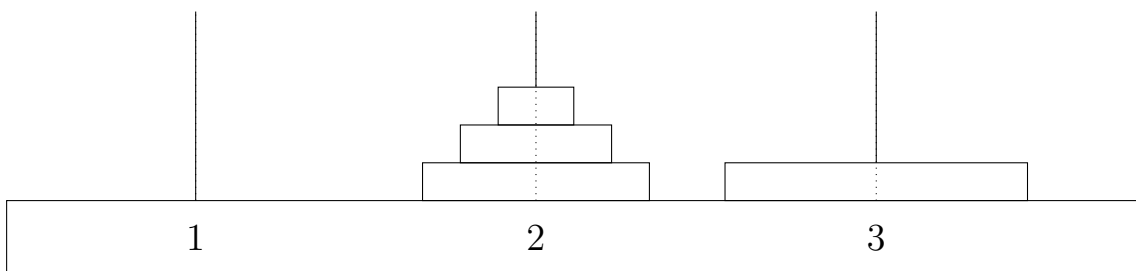
Départ



Instructions

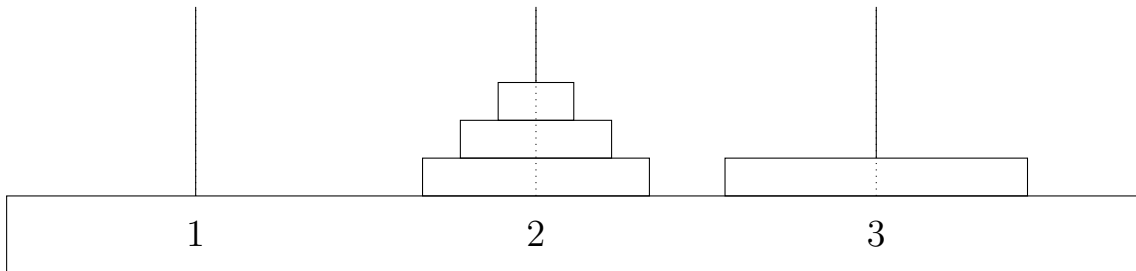
$3 \rightarrow 1; 3 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3$

Fin



Fiche 9 : correction

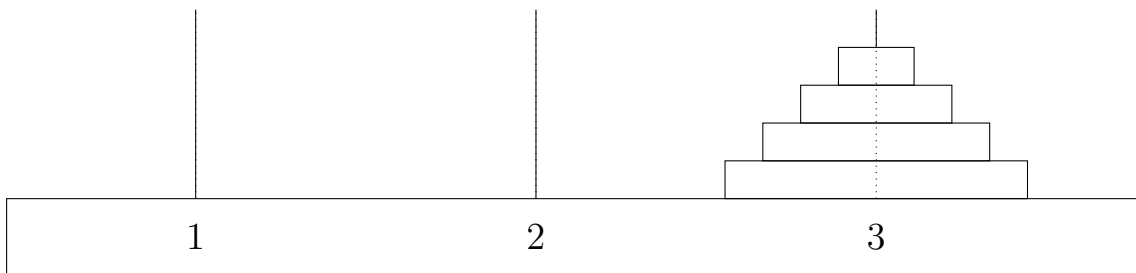
Départ



Instructions

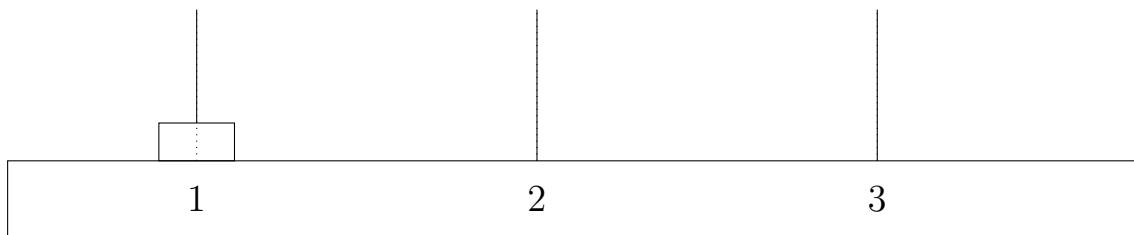
$2 \rightarrow 3$; $2 \rightarrow 1$; $3 \rightarrow 1$; $2 \rightarrow 3$; $1 \rightarrow 2$; $1 \rightarrow 3$; $2 \rightarrow 3$

Fin



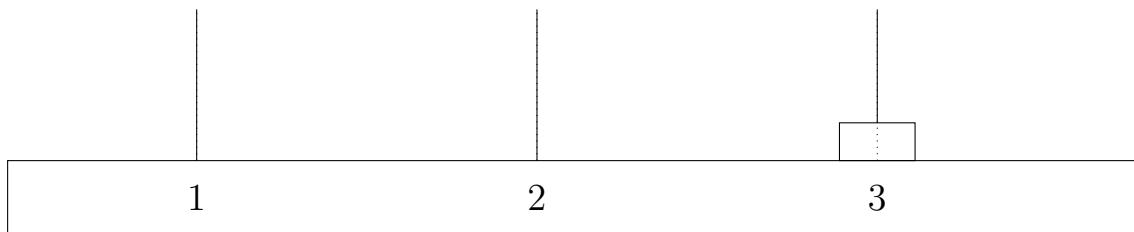
Bouger 1 disque du piquet 1 au piquet 3

Départ



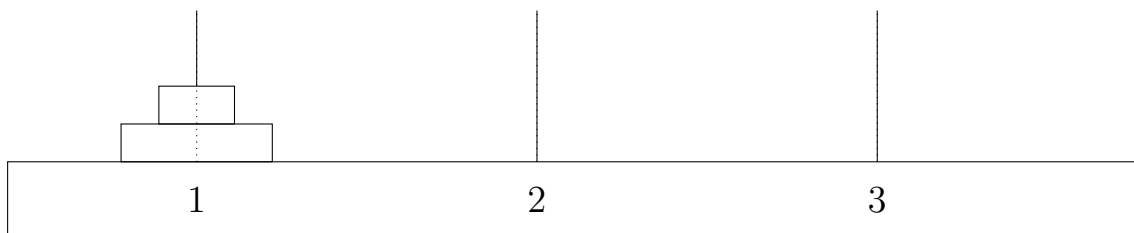
Instructions, à compléter ! Astuce : il est possible de réussir avec une seule instruction !

Fin



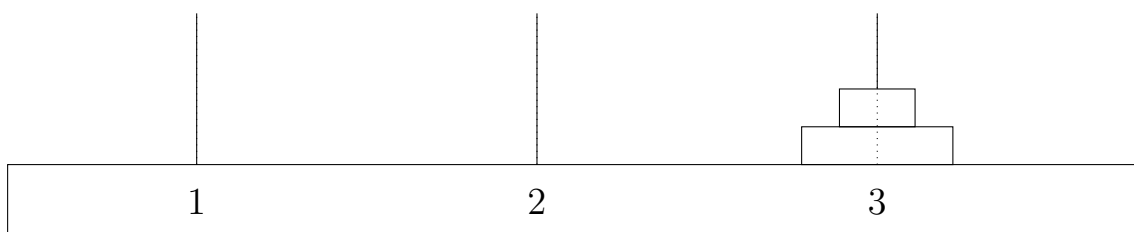
Bouger 2 disques du piquet 1 au piquet 3

Départ



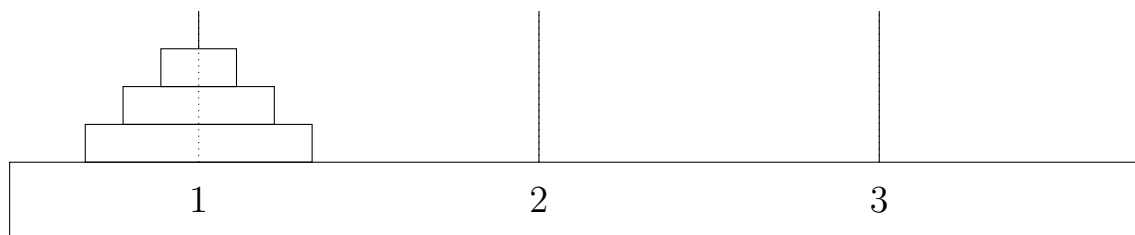
Instructions, à compléter ! Astuce : en trois coups cette fois !

Fin



Bouger 3 disques du piquet 1 au piquet 3

Départ



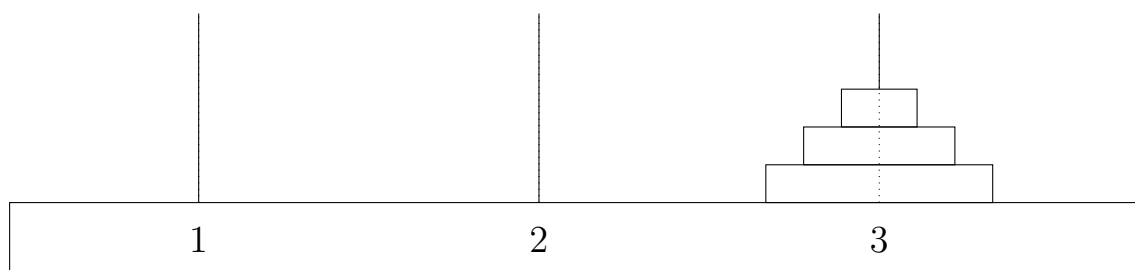
Instructions (Plus dur cette fois!)

Aide : utiliser la fiche 4 puis la fiche 6

Brouillon

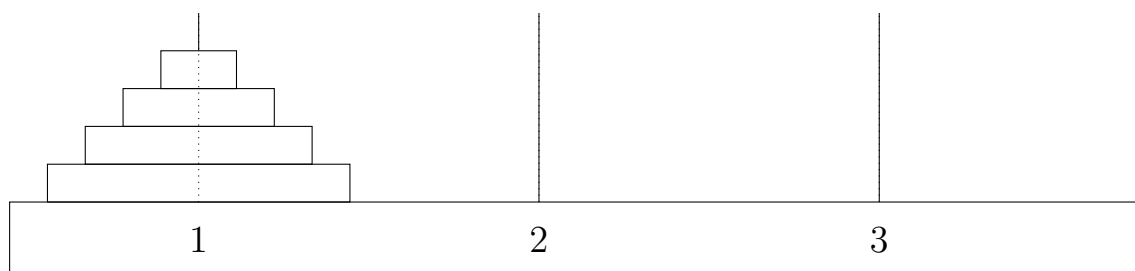
Comment aller du départ à la fin :

Fin



Bouger 4 disques du piquet 1 au piquet 3

Départ



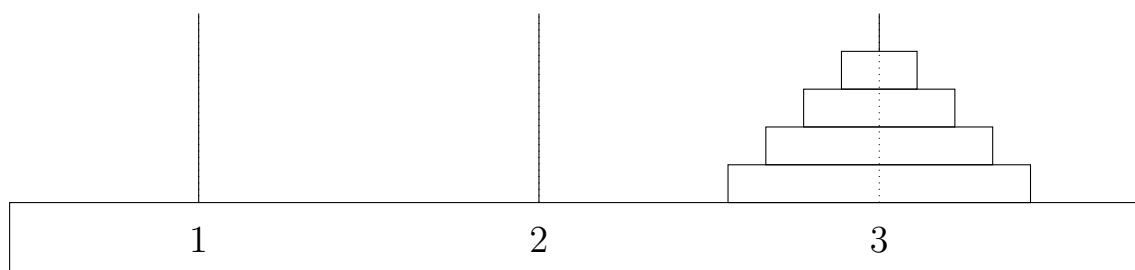
Instructions (Presque le plus dur !)

Aide : utiliser les fiches 7, 8 et 9

Brouillon

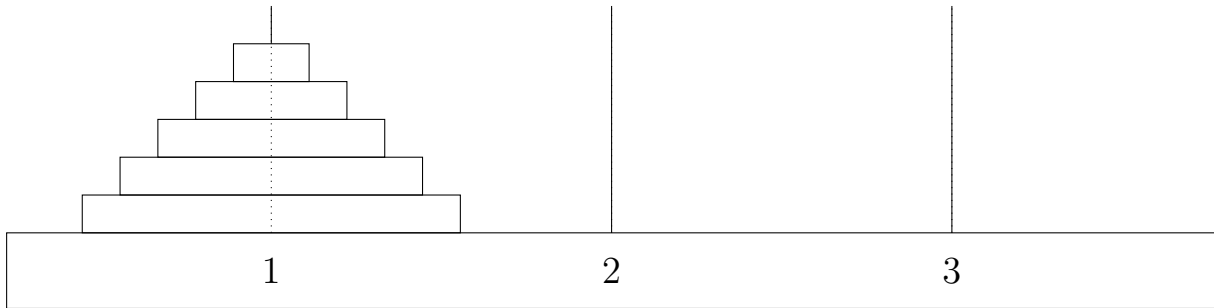
Comment aller du départ à la fin :

Fin



Bouger 5 disques du piquet 1 au piquet 3

Départ



Instructions (Très très dur !)

Aide

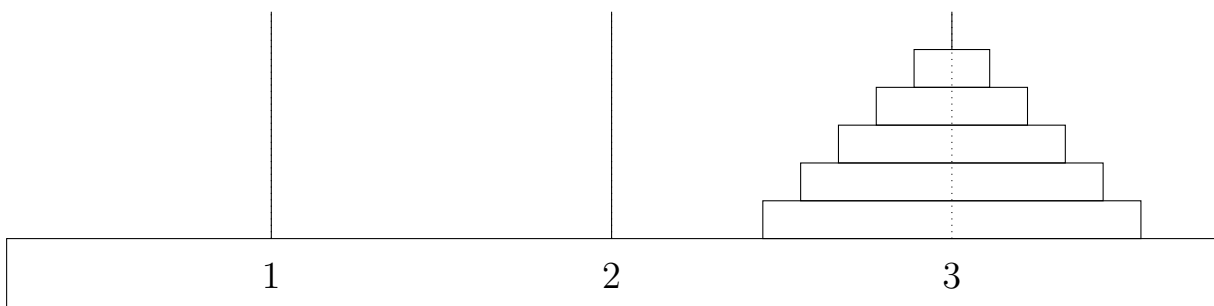
1. Échanger les numéros des piquets 2 et 3 (mettre des petits papiers par-dessus !)
2. Bouger 4 disques du piquet 1 au piquet 3 (utiliser une autre fiche !)
3. Bouger le grand disque du piquet 1 au piquet 2
4. Remettre les numéros 2 et 3 à la bonne place
5. Échanger les numéros des piquets 1 et 2
6. Bouger 4 disques du piquet 1 au piquet 3 (réutiliser une autre fiche !)

N'hésitez pas à prendre une feuille à part pour avoir plus de place pour le brouillon !

Brouillon

Comment aller du départ à la fin :

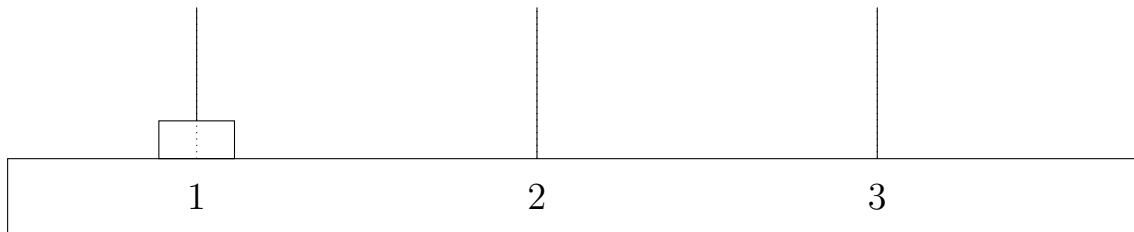
Fin



Correction

Bouger 1 disque du piquet 1 au piquet 3

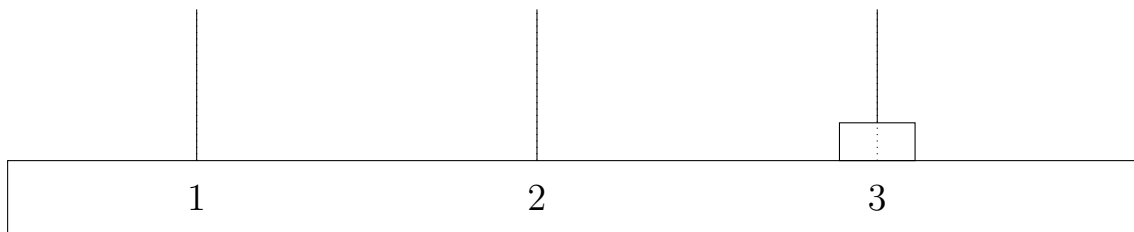
Départ



Instructions, à compléter ! Astuce : il est possible de réussir avec une seule instruction !

$1 \rightarrow 3$

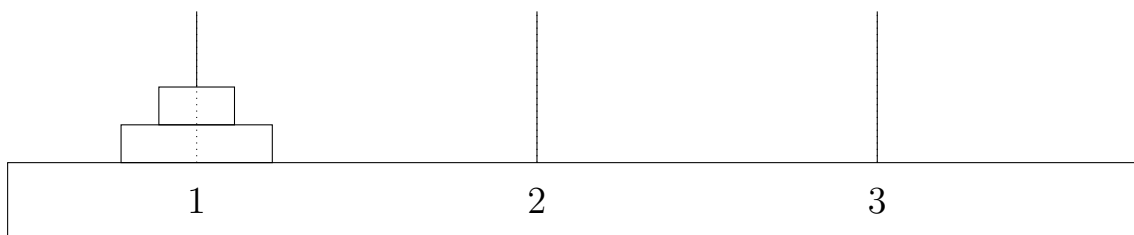
Fin



Correction

Bouger 2 disques du piquet 1 au piquet 3

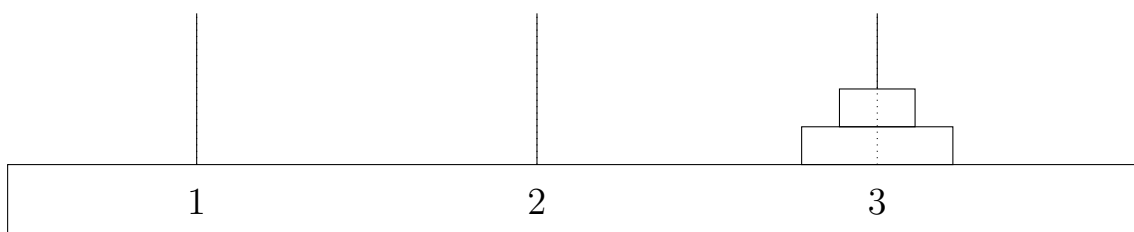
Départ



Instructions, à compléter ! Astuce : en trois coups cette fois !

$1 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 3$

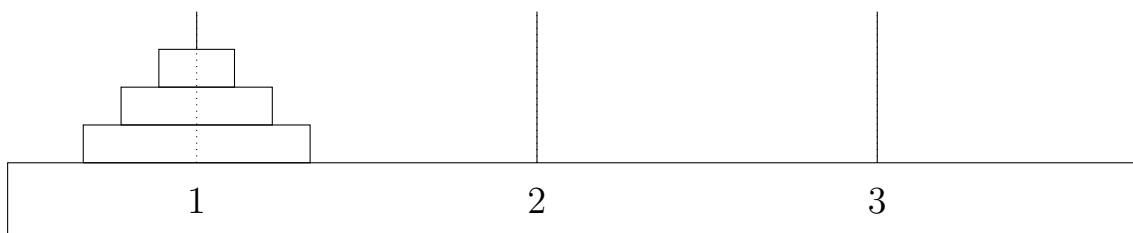
Fin



Correction

Bouger 3 disques du piquet 1 au piquet 3

Départ



Instructions (Plus dur cette fois!)

Aide : utiliser la fiche 4 puis la fiche 6

Brouillon

Comment aller du départ à la fin :

Comment aller du départ à la fin :

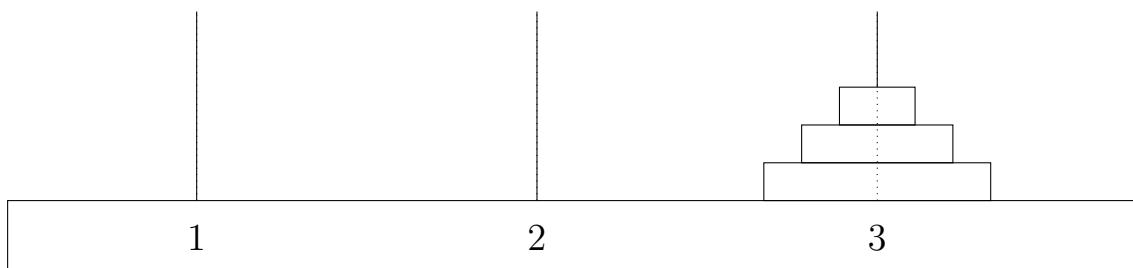
Fiche 4 $1 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 2; 3 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3$

Fiche 6 $2 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 1; 3 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 3$

Cependant, la partie de la fiche 6 utilise des coups superflus. Il est donc possible de déplacer ces trois piquets avec moins de coups qu'en combinant les fiches 4 et 6 :

$1 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 2; 3 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 1; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 3$

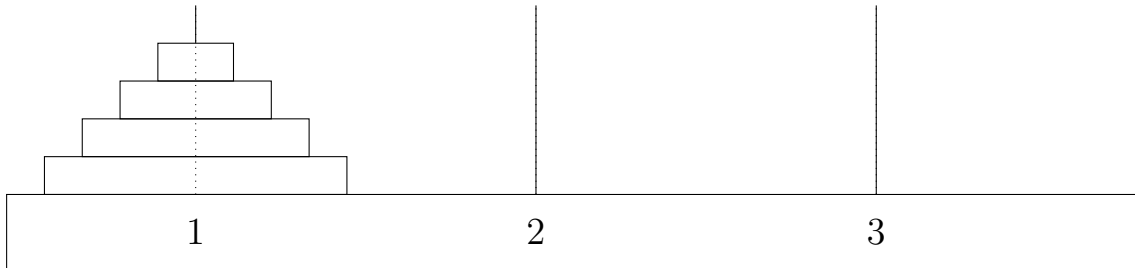
Fin



Correction

Bouger 4 disques du piquet 1 au piquet 3

Départ



Instructions (Presque le plus dur !)

Aide : utiliser les fiches 7, 8 et 9

Brouillon

Comment aller du départ à la fin :

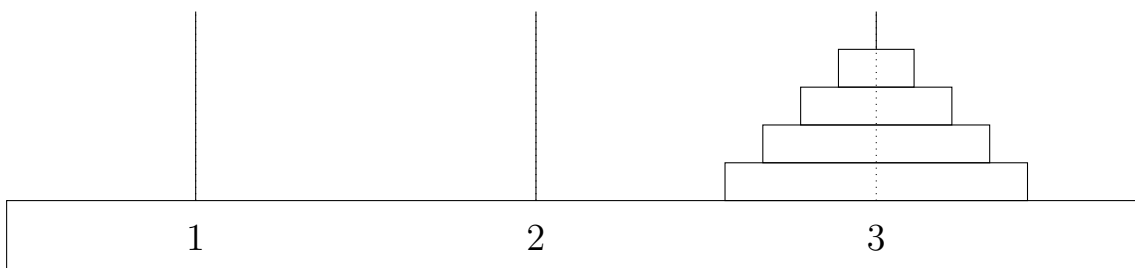
Comment aller du départ à la fin :

Fiche 7 $1 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 2$

Fiche 8 $3 \rightarrow 1; 3 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3$

Fiche 9 $2 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 1; 3 \rightarrow 1; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 3$

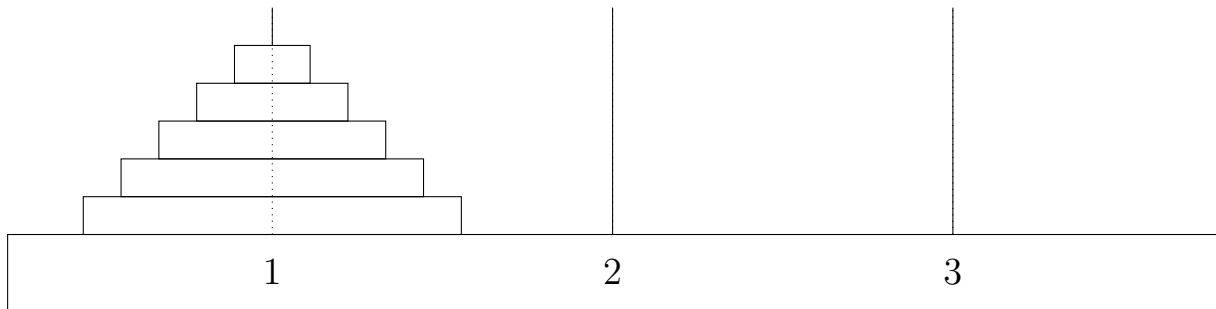
Fin



Correction

Bouger 5 disques du piquet 1 au piquet 3

Départ



Instructions (Très très dur !)

Aide

1. Échanger les numéros des piquets 2 et 3 (mettre des petits papiers par-dessus!)
2. Bouger 4 disques du piquet 1 au piquet 3 (utiliser une autre fiche!)
3. Bouger le grand disque du piquet 1 au piquet 2
4. Remettre les numéros 2 et 3 à la bonne place
5. Échanger les numéros des piquets 1 et 2
6. Bouger 4 disques du piquet 1 au piquet 3 (réutiliser une autre fiche!)

Comment aller du départ à la fin :

Sans changer le nom des étiquettes :

Point 2 $1 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 2; 3 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 1; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 2; 3 \rightarrow 2; 3 \rightarrow 1; 2 \rightarrow 1; 3 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 2; 3 \rightarrow 2$

Point 3 $1 \rightarrow 3$

Point 6 $2 \rightarrow 1; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 1; 3 \rightarrow 2; 3 \rightarrow 1; 2 \rightarrow 1; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 2; 3 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 1; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 3$

En changeant le nom des étiquettes :

Point 1 Les étiquettes sont, de gauche à droite : 1 3 2.

Point 2 $1 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 2; 3 \rightarrow 1; 3 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 1; 3 \rightarrow 1; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 3$

Point 3 $1 \rightarrow 2$

Points 4 puis 5 Les étiquettes sont, de gauche à droite : 2 1 3.

Point 6 $1 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 2; 3 \rightarrow 1; 3 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 1; 3 \rightarrow 1; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 2; 1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 3$

Fin

