Répartition des bonbons

Informatique débranchée

Hugo JACOB

Sommaire

1 Descriptif

À partir de la primaire

Séance d'une heure environ

Problème

L'activité consiste à résoudre le problème suivant :
On dispose d'un ensemble d'enfants auxquels on veut distribuer des bonbons. Chaque enfant n'a le droit qu'à un seul bonbon et n'est prêt à manger que certains types de bonbons. Chaque bonbon ne peut être attribué qu'à un enfant. Étant donnés les bonbons disponibles et les goûts des différents enfants, il s'agit de trouver une stratégie qui permet de distribuer le plus de bonbons et donc de décevoir le moins d'enfants.

Déroulement de l'activité

L'activité commence en proposant à des petits groupes d'élèves des exemples de problèmes sur lesquels ils doivent trouver la meilleure solution. On laisse d'abord les élèves chercher par eux-même puis pour les aider à raisonner, on représentera le problème sous forme d'un graphe : Les enfants sont représentés par des cercles d'une certaine couleur et les bonbons par des cercles d'une autre couleur, on relie le cercle d'enfant au cercle d'un bonbon s'il aime ce type de bonbon.

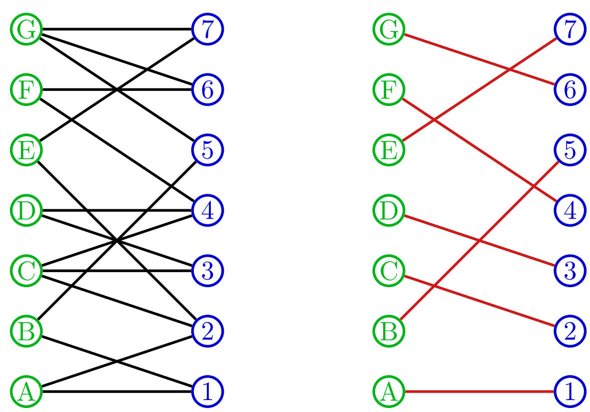


Figure 1: Représentation d'un exemple et solution

On s'interroge ensuite sur une méthode pour parvenir systématiquement à une stratégie optimale. Pour cela, on guidera (si nécessaire) les élèves vers une manière d'améliorer petit à petit leur répartition des bonbons.

Une fois la méthode établie, on peut la mettre en pratique avec les élèves.

Notions informatiques abordées

Cette activité développe les notions de *graphe* et d'*algorithme*. Les graphes sont un outil très utile pour modéliser formellement des problèmes concrets et sont donc très utilisés en informatique. Les algorithmes ont eux une place centrale dans l'automatisation des calculs.

Plus précisément, le problème abordé correspond à la notion de *couplage maximum* dans un *graphe biparti*.

2 Fiche professeur

Objectif : Découvrir les graphes comme outil de représentation au travers d'un problème d'optimisation.

Compétences : Exposer ses résultats et sa démarche à l'oral.
Décrire une procédure systématique .

Durée : 1h

Durée	Phases	Activités et consignes	Dispositif	Matériel
5'	Introduction de la séance	Présentation. Explication du type de problème à résoudre.	Oral collectif	
5'	Situation de recherche	Distribuer une fiche avec une description textuelle de deux problèmes à chaque groupe. Les groupes cherchent à s'approprier puis résoudre ces problèmes.	Groupes de 4 ou 5	Fiche élève 1
5'	Mise en commun	Chaque groupe présente comment il est arrivé à produire des solutions. Introduction de la représentation du problème par un graphe, en prenant l'exemple d'un des problèmes qu'ils viennent de traiter.	Oral collectif	
5'	Situation de recherche	Les élèves construisent la représentation en graphe de l'autre exemple.		
15'	Situation de recherche	Distribuer une nouvelle fiche avec cette fois une représentation des problèmes par des graphes. Les groupes doivent essayer de résoudre ces exemples. Demander aux élèves d'essayer de trouver une méthode systématique pour résoudre le problème et une méthode pour améliorer une solution si elle n'est pas optimale.	Groupes de 4 ou 5	Fiche élève 2
15'	Mise en commun	Chaque groupe présente la (ou les) méthode(s) qu'il a élaborée(s) ainsi que les résultats produits. Demander aux élèves s'ils pensent que leurs solutions sont améliorables et pourquoi. (Si possible) Proposer des contre-exemples aux méthodes proposées si les élèves n'y ont pas pensé.		

5’	Conclusion Correction	Introduire la méthode des « chemins augmentants » (si les élèves ne l’ont pas trouvée), montrer qu’elle permet systématiquement de résoudre le problème.		
10’	Mise en pratique **(facultatif)**	Chaque groupe va mettre en scène la recherche de chemins augmentants, chaque élève se voyant attribuer une limitation sur les bonbons auxquels il a le droit. La recherche est constituée d’étapes de négociation imbriquées (cf. méthode des chemins augmentants en Annexe). On utilise une ficelle pour se rappeler de l’imbrication.	Groupes de 4 ou 5	Des petits objets représentant les bonbons 1 ficelle par groupe

3 Annexe

Sur les pages suivantes vous trouverez les éléments permettant d’organiser l’activité : les fiches élèves, la fiche solution, une description de l’algorithme qui permet de résoudre le problème et une ouverture à des applications des problèmes de couplage.

Fiche élève 1

Exemple 1 :

On dispose d’un bonbon arlequin, d’un carambar et d’un dragibus.

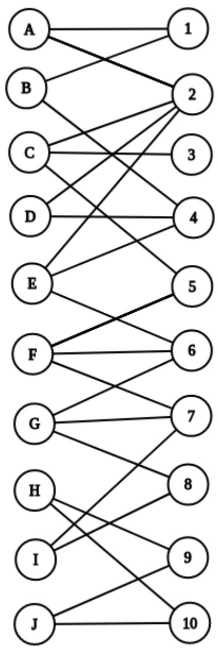
Anna aime les arlequins et les carambars.
Benjamin aime les arlequins et les dragibus.
Charlie aime les dragibus.

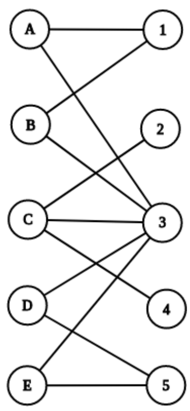
Exemple 2 :

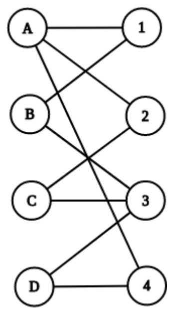
On dispose d’un bonbon arlequin, d’un carambar, d’un bonbon banane, d’un dragibus, d’un schtroumpf et d’un kréma.

Amélie aime les arlequins et les dragibus.
Baptiste aime les bananes et les carambars.
Célia aime les arlequins, les bananes et les schtroumpfs.
Daniel aime les carambars, les dragibus et les schtroumpfs.
Étienne aime les dragibus et les krémas.
Félix aime les schtroumpfs et les krémas.

Fiche élève 2







Question supplémentaire :

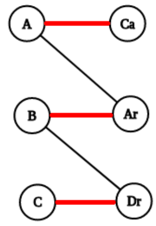
En supposant qu’on connaît une méthode pour résoudre ce problème, comment résoudre la version dans laquelle une personne peut avoir plusieurs bonbons ?

Fiche solution

Les attributions de bonbon sont représentées en rouge.

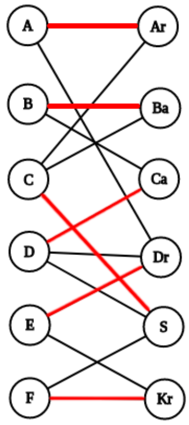
Exemple 1 :

Anna aime les arlequins et les carambars.
Benjamin aime les arlequins et les dragibus.
Charlie aime les dragibus.

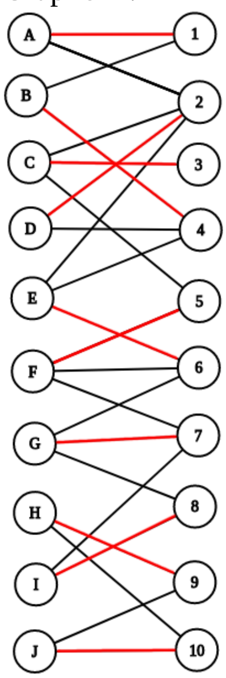


Exemple 2 :

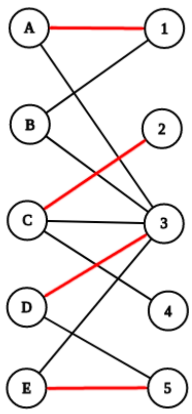
Amélie aime les arlequins et les dragibus.
Baptiste aime les bananes et les carambars.
Célia aime les arlequins, les bananes et les schtroumpfs.
Daniel aime les carambars, les dragibus et les schtroumpfs.
Etienne aime les dragibus et les krémas.
Félix aime les schtroumpfs et les krémas.



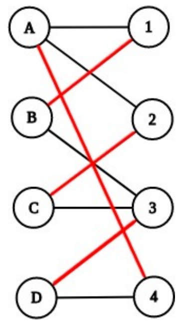
Graphe 1 :



Graphe 2 :



Graphe 3 :



Question supplémentaire : On peut transformer un enfant qui a le droit à k bonbons en k enfants virtuels ayant le droit à un seul bonbon chacun.

Méthode des chemins augmentants

On part d’une personne sans bonbon, avec la bobine de file enroulée devant elle.

Si elle aime un bonbon non attribué, elle le prend.
Sinon elle demande à chaque personne qui a un bonbon qu’elle aime si elle peut avoir son bonbon. La personne accepte si elle trouve une façon d’obtenir un autre bonbon A et dans ce cas elle donne son précédent bonbon et obtient le bonbon A.

On utilise la ficelle pour représenter les demandes imbriquées : à chaque demande, on déroule la ficelle vers la personne qui reçoit la demande, la ficelle revient avec ou sans bonbon une fois que cette personne a pris sa décision.
Si la ficelle revient avec un bonbon, le demandeur peut lui-même renvoyer la ficelle avec son ancien bonbon, sinon il continue ses demandes. Si la ficelle n’est jamais revenu avec un bonbon, la personne finit par renvoyer la ficelle sans bonbon.

Remarque : Il est inutile de demander un bonbon à une personne qui est déjà à la recherche d’un bonbon. La ficelle passe donc au plus une fois devant chaque personne. Il est également inutile de demander un bonbon à une personne qui a déjà refusé dans la configuration actuelle.

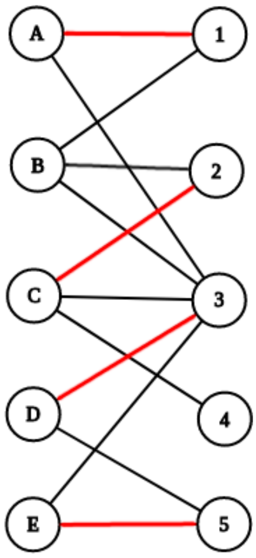
Une fois que toutes les personnes sans bonbon ont demandé sans succès dans la configuration actuelle, on s’arrête. On a alors atteint une solution optimale.

Pseudocode :

```
demandeRecursive(enfant A) :
	marquer A
	Pour chaque bonbon X envisagé par A :
		Si (X n’est pas attribué) :
			bonbonDe[A]=X ; enfantDe[X]=A
			renvoyer Oui
		Sinon, Si (le bonbon X est attribué et enfantDe[X] n’est pas marqué
		    et demandeRecursive(enfantDe[X]) renvoie Oui) :
			bonbonDe[A]=X; enfantDe[X]=A
			renvoyer Oui
	renvoyer Non

procedure :
	modification=Oui
	Tant que modification :
		modification=Non
		Enlever tous les marquages
		Pour chaque enfant E sans bonbon :
			Si demandeRecursive(E) :
				modification=Oui
```

Exemple :



Dans cette situation, le seul point de départ est B.
B recherche un bonbon :
- B aime 1 donc demande à A.
- A recherche un autre bonbon :
  - A aime 3 donc demande à D.
  - D recherche un autre bonbon :
    - D aime 5 donc demande à E.
    - E recherche un autre bonbon :
      - E aime 3 mais D est marqué (cherche déjà).
      - E n’aime pas d’autre bonbon et refuse.
    - D n’aime pas d’autre bonbon et refuse.
  - A n’aime pas d’autre bonbon et refuse.
- B aime 3 donc demande à D.
- D est marqué donc refuse.
- (rien n’a changé depuis sa dernière recherche donc il ne s’embête pas à demander)
- B aime 2 donc demande à C.
- C recherche un autre bonbon :
  - C aime 3 mais D est marqué.
  - C aime 4 qui est libre.
  - C prend 4 et accepte.
- B prend 2 que C vient de lui laisser.

Applications du problème de couplage

La représentation sous forme de graphe permet d’obtenir une forme plus abstraite du problème, privée des aspects contextuels. Voici quelques autres exemples d’application du même problème :

- attribution d’organes à greffer. Les patients qui nécessitent une greffe correspondent aux enfants et les organes correspondent aux bonbons.
- affectation d’étudiants à des écoles. Les écoles correspondent aux enfants et les étudiants aux bonbons.

Un élément ignoré dans notre modèle est la notion de préférence. Pour être intégrée dans un modèle, cette préférence doit être quantifiée. La méthode des chemins augmentants s’adapte à un modèle avec des préférences quantifiées des enfants pour chaque bonbon. Cependant, dans les deux exemples évoqués, on peut envisager un notion de préférence pour chacun des types d’agents (le donneur et le receveur, l’école et l’étudiant). Dans ces cas, on essaie en général de trouver une configuration telle qu’il n’existe pas de couple dont les deux éléments préféreraient être ensemble qu’avec celui qui leur a été attribué, c’est le problème des mariages stables.