Le treillis des Chemins de Delannoy

Jean-Michel Autebert
Université Paris 7
Denis Diderot

Matthieu Latapy
Université Paris 7
Denis Diderot

Sylviane R. Schwer*
LIPN, UPRESA CNRS 7030
Institut Galilée, Université Paris 13

Résumé

Un chemin de Delannoy est un chemin minimal avec pas diagonaux du plan $\mathbb{Z}^2$ entre deux points quelconques. Nous étudions les chemins de Delannoy comme une classe particulière d'une congruence engendrée par un système de Thue. Ce système induit un ordre partiel sur les chemins de Delannoy dont nous montrons la structure de treillis distributif. Ce système admet également une interprétation temporelle que nous indiquons brièvement.

mots clefs : systèmes de Thue, chemins de Delannoy, treillis.

Abstract

A Delannoy path is a minimal path between two given points on $\mathbb{Z}^2$, with horizontal, vertical and diagonal steps. We study the Delannoy paths as a special class of a congruence defined by a Thue system. This system induces a partial ordering of the set of Delannoy paths, which actually is a distributive lattice. This system also admits a natural interpretationin terms of representation of temporal knowledge, which we briefly describe.

Keywords: Thue Systems, Delannoy Paths, Lattice.

1 Introduction

Une définition classique [17, p.411] des chemins de Delannoy est donnée comme chemins que l'on peut dessiner sur une grille rectangulaire partant du coin Sud-Ouest, se dirigeant vers le coin Nord-Est, et n'utilisant que les trois pas élémentaires suivants : *nord*, *est* et *nord-est*. Ce sont donc des chemins avec pas diagonaux minimaux, *i.e.* sans retour en arrière [11, 3]. Sur une grille carrée, ce sont les chemins du roi ou de la reine sur un échiquier [4, 10]. Les nombres de Delannoy, qui comptent les chemins de Delannoy, s'obtiennent récursivement en utilisant la formule $D(p,q) = D(p_1,q) + D(p,q-1) + D(p-1,q-1)$ avec $D(0,q) = D(p,0) = 1, \forall p,q \geq 0$. Cette suite a été étudiée pour elle même [14].

*Université Paris 13, Institut Galilée, Avenue Jean-Baptiste Clément 93430 Villetaneuse, France, fax : +33 1.48.26.07.12, tél. : +33 1.49.40.36.84, e-mail : schwer@lipn.univ-paris13.fr

La série génératrice sur deux variables est $F(X,Y) = \sum_{p,q\geq 0} D(p,q)X^pY^q = \frac{1}{1-X-Y-XY}$ [3]. Les nombres de Delannoy centraux (*i.e.* p=q) sont donnés par $D(n,n) = P_n(3)$ où $P_n(x)$ est le polynôme de Legendre. La série génératrice des nombres de Delannoy centraux est $F(X) = \sum_{n\geq 0} D(n,n)X^n = \frac{1}{\sqrt{1-6.x+x^2}}$ [14]. Les chemins de Delannoy sont en correspondances naturelles avec des objets étudiés dans des domaines mathématiques et informatiques variés [13].

Beaucoup de chemins minimaux dans le plan ont été étudiés en termes de langages formels (chemins de Dyck, de Motzkin, de Schröder) [17]. Nous allons suivre cette voie et introduire les mots de Delannoy et le système de réécriture de Delannoy sur un alphabet ordonné afin d'en déduire une structure d'ordre sur ces objets de Delannoy. Appelons $\mathfrak{D}(p,q)$ l'ensemble des mots ou chemins de Delannoy entre deux points distants de p pas *est* et de q pas *nord*. Nous montrons que $\mathfrak{D}(p,q)$, muni de cet ordre, possède une structure de treillis distributif dont la trame (ensemble des éléments disjonctifs-irréductibles *i.e.* éléments issus d'au plus un père) est régulière, aisément exprimable, et de cardinal $2.p.q$.

Ce système de réécriture admet aussi une interprétation temporelle de voisinage dans le cas des chemins de Delannoy sur une grille 2×2. Nous sommes dans le cas particulier des S-mots définis sur des S-lettres de [12, 13], où le S-alphabet provient d'un alphabet de cardinalité 2. Supposons que les lettres a et b codent chacune un élément temporel (point ou intervalle), et soit c la S-lettre $\{a,b\}$ de [13]. Chaque occurrence d'une lettre dans un mot représente un instant contenant les extrémités des éléments temporels qu'elle représente, le nombre d'occurrences des lettres indiquant de quel objet il s'agit.

Les trois ordres $\mathfrak{D}(1,1)$, $\mathfrak{D}(1,2)$ et $\mathfrak{D}(2,2)$ sont bien connus en représentation des connaissances temporelles qualitatives. Ainsi $\mathfrak{D}(1,1)$ traite les positions relatives de deux points temporels P_a et P_b, c'est-à-dire le monde de Vilain [15]. Le mot ab signifie que le point temporel P_a est avant le point temporel P_b, le mot c signifie que les deux points temporels sont synchrones et le mot ba que le point temporel P_b précède le point temporel P_a. $\mathfrak{D}(2,1)$ donne les positions relatives d'un point temporel P_b avec un intervalle temporel I_a, c'est-à-dire le monde de Vilain et Kautz [16], et $\mathfrak{D}(2,2)$ donne les positions relatives de deux intervalles, c'est-à-dire le monde de Allen [1]. Les figures 1, 2 et 3 montrent les ordres correspondant. Plus généralement, $\mathfrak{D}(p,q)$ donne les positions relatives de deux intervalles généralisés, c'est-à-dire le monde de Ligozat [9].

Le système de Thue choisi correspond exactement à la relation de A-voisinage définie par Freska [6], utilisé pour les patrons de [5].

2 Le système de Thue

Les notations utilisées concernant les langages formels suivent [2, 7]. Nous les rappelons ici brièvement.

Si X est un alphabet, X^* est l'ensemble des mots sur X, et ε désigne le mot vide. Si f est un mot de X^*, on note $|f|$ la longueur de f, $\preceq$ la relation de préfixité, et pour un entier k tel que $0 \leq k \leq |f|$, $f_{\leq k}$ le préfixe de longueur k de f.

Si R est une relation sur X^*, on s'intéresse au système de Thue engendré par cette relation, c'est-à-dire à la relation, notée $\longrightarrow$, sur X^* qui est la plus petite relation qui contient R et est compatible avec le produit de concaténation : $\forall f, g \in X^*, fug \longrightarrow fvg \Longleftrightarrow (u, v) \in R$.

On utilise les notions et notations usuelles, telles qu'on peut les trouver par exemple dans [2] ou [8]. En particulier, on note $\longleftarrow$ la relation symétrique de $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$ désigne la fermeture symétrique de $\longrightarrow$, et $\longrightarrow^*$ sa fermeture réflexive et transitive. On note $[f] = \{g \in X^* \mid f \longleftrightarrow^* g\}$ et $L_R(f) = \{g \in X^* \mid f \longrightarrow^* g\}$. Ces notations sont étendues aux langages : $[L] = \bigcup_{f \in L}[f]$ et $L_R(L) = \bigcup_{f \in L} L_R(f)$.

Rappelons [2] les propriétés des systèmes que l'on va utiliser. Un système est dit *nœthérien* s'il n'existe pas de chaîne infinie. Il est dit *confluent* si $f \longrightarrow^* u$ et $f \longrightarrow^* v$ implique l'existence de g tel que $u \longrightarrow^* g$ et $v \longrightarrow^* g$. Un élément f est dit *irréductible* pour $\longrightarrow$ s'il n'existe aucun élément g tel que $f \longrightarrow g$.

Dans cet article, nous nous intéressons au système de Thue défini sur l'alphabet $X = \{a, b, c\}$ par la relation $\varphi = \{(ab, c), (c, ba)\}$.

Notons tout de suite que la relation $\varphi^{-1} = \{(c, ab), (ba, c)\}$ est la même relation que la relation $\varphi = \{(ab, c), (c, ba)\}$, à un renommage des lettres près. Toute propriété de $\longrightarrow$ est donc aussi une propriété de $\longleftarrow$.

Remarquons que la relation $\longrightarrow^*$ est compatible avec l'ordre lexicographique, noté $\leq$, sur X^* induit par $a < c < b$, *i.e.* $f \longrightarrow^* g \Longrightarrow f \leq g$. Ceci implique en particulier que la relation $\longrightarrow^*$ est antisymétrique. C'est donc une relation d'ordre.

Le but des paragraphes qui suivent est de montrer d'une part que ce système de réécriture fournit une représentation appropriée des chemins de Delannoy, et d'autre part que cette relation d'ordre confère à X^* une structure de treillis distributif.

3 La correspondance avec $\mathfrak{D}(p, q)$

Pour montrer la correspondance entre le système que nous venons de définir et les chemins de Delannoy, il nous faut en étudier les propriétés.

On vérifie aisément que ce système est nœthérien et confluent. Tout mot admet donc un unique mot irréductible et sa classe est obtenue à partir de cet irréductible en suivant les deux règles du système uniquement dans le sens exprimé. De même $\varphi^{-1} = \{(c, ab), (ba, c)\}$ est un système nœthérien et confluent.

Proposition 3.1 *Soit l'alphabet $X = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots irréductibles pour le système de Thue $\varphi = \{(ab, c), (c, ba)\}$ est b^*a^*. De même, l'ensemble des mots irréductibles pour le système de Thue $\varphi^{-1} = \{(c, ab), (ba, c)\}$ est a^*b^*.*

En effet, pour qu'aucune règle ne puisse s'appliquer par φ, il faut et il suffit que le mot ne contienne aucun c et aucun facteur ab d'où le résultat pour φ. Le même raisonnement conduit au résultat pour φ^{-1}.

Si l'on définit l'homomorphisme $\psi : X^* \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, où $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est muni de l'addition composante à composante, par : $\psi(a) = (0,1)$, $\psi(b) = (1,0)$ et $\psi(c) = (1,1)$, on vérifie facilement que la classe d'un mot f est l'ensemble des mots ayant même image par ψ : $[f] = \{g \in X^* \mid \psi(g) = \psi(f)\}$.

Si $\psi(f) = (p,q)$ ce dernier couple caractérise la classe de f, et on la notera $\mathfrak{L}(p,q)$, ce qui évite de faire référence à un f particulier.

On a donc $\mathfrak{L}(p,q) = \{g \in X^* \mid a^p b^q \longrightarrow^* g \longrightarrow^* b^q a^p\}$. Autrement dit, $\langle X^*, \longrightarrow^* \rangle$ est un ensemble partiellement ordonné dont l'ensemble des éléments minimaux est $a^* b^*$ et l'ensemble des éléments maximaux est $b^* a^*$.

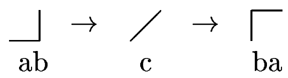
On notera $\psi_1(f)$ et $\psi_2(f)$ respectivement la première et la seconde composante de $\psi(f)$.

Lemme 3.1 *Soit l'alphabet $X = \{a,b,c\}$, et le système de Thue $\varphi = \{(ab,c),(c,ba)\}$ sur X^*. Le quotient $X^*/_{\longleftrightarrow^*}$ est isomorphe à $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni de l'addition composante à composante.*

On peut assimiler $\mathfrak{D}(p,q)$ à l'ensemble des chemins minimaux avec pas diagonaux du point origine $(0,0)$ au point final (p,q). Un chemin est une suite de points (i,j) de $\mathbb{N}^2$. Un pas *est* est un couple de points $\langle (i,j),(i+1,j) \rangle$, un pas *nord* est un couple de points $\langle (i,j),(i,j+1) \rangle$, un pas *nord-est* est un couple de points $\langle (i,j),(i+1,j+1) \rangle$. Il faut donc trois lettres pour coder les pas possibles, la troisième lettre représentant la simultanéité d'écriture des deux premières.

L'interprétation géométrique par les chemins est représentée Figure 1.

Figure 1: Le système de Thue ou l'ordre $\mathfrak{D}(1,1)$



Proposition 3.2 *Il existe une correspondance naturelle entre l'ordre $\mathfrak{D}(p,q)$ et la classe du mot $a^p b^q$ modulo le système de Thue φ.*

L'homomorphisme ψ transforme bijectivement le langage $\mathfrak{L}(p,q) = \{f \in X^* \mid \psi_1(f) = p$ et $\psi_2(f) = q\}$ en $\mathfrak{D}(p,q)$. Nous proposons donc d'appeler *système de réécriture de Delannoy* le système φ. On s'autorisera par la suite à confondre les notations $\mathfrak{L}(p,q)$ et $\mathfrak{D}(p,q)$.

Les ordres $\mathfrak{D}(1,2)$ et $\mathfrak{D}(2,2)$ sont représentés Figures 2 et 3.

Figure 2: L'ordre $\mathfrak{D}(1,2)$

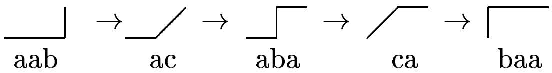
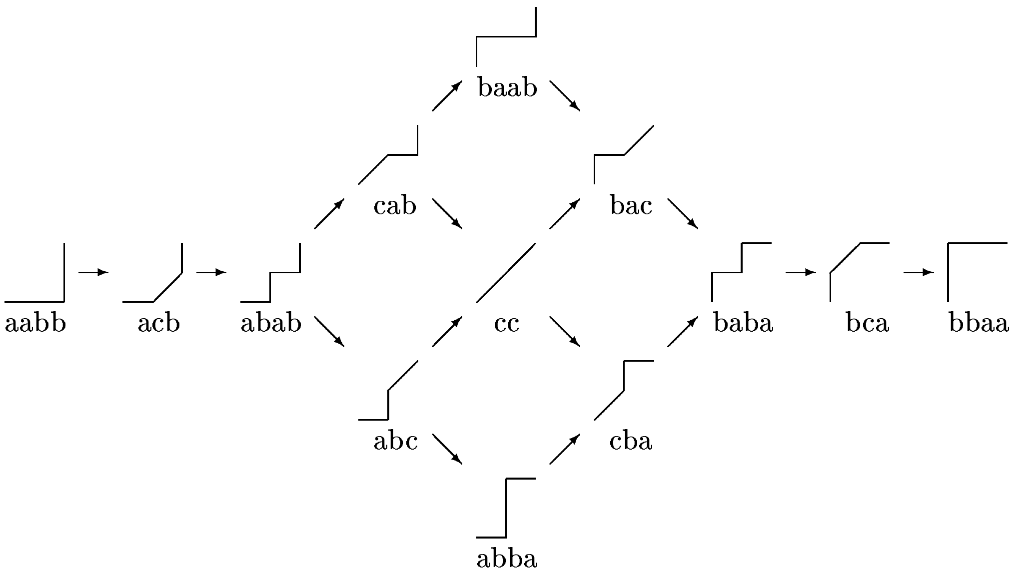


Figure 3: L'ordre $\mathfrak{D}(2,2)$



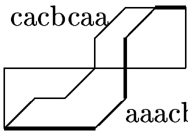
4 $\mathfrak{D}(p,q)$ est un treillis distributif

Rappelons qu'un ensemble ordonné est un *treillis* si pour tout couple d'éléments (x,y) l'ensemble des éléments inférieurs (resp. supérieurs) à ces deux éléments possède un unique élément maximal (resp. minimal), appelé borne inférieure (resp. supérieure) et noté $x \bigtriangleup y$ (resp. $x \bigtriangledown y$). Si, de plus, les opérateurs $\bigtriangleup$ et $\bigtriangledown$ sont distributifs l'un par rapport à l'autre, le treillis est dit *distributif*.

Le point essentiel va être de prouver qu'un mot précède un autre mot dans l'ordre $\longrightarrow^*$ si et seulement si il se trouve *en-dessous* de celui-ci. Deux mots seront incomparables s'ils se *croisent*. Ainsi, on lira sur la Figure 4 que *aaacbbca* précède *cacbcaa* et est incomparable avec *bbaaaaaabb*.

Afin de caractériser l'ensemble des mots qui suivent, selon cet ordre, un mot donné, nous allons transformer les mots en ajoutant une occurrence d'un marqueur # après chaque occurrence de la lettre c et associer à chaque mot ainsi marqué une suite de coefficients d'évolution.

Figure 4: Trois chemins de $\mathfrak{D}(6,4)$ et leurs mots associés (dans $\mathfrak{L}(p,q)$).



Soit $X_\# = (X \cup \{\#\})$. On définit l'homomorphisme θ de X^* dans $X_\#^*$ par $\theta(a) = a$, $\theta(b) = b$ et $\theta(c) = c\#$ et on note $\mathfrak{L}_\#(p,q) = \theta(\mathfrak{L}(p,q))$.

Cette insertion d'un # après chaque c permet de travailler sur des mots qui, à l'intérieur d'une classe, ont tous la même longueur : $g \in [f] \Longrightarrow |\theta(g)| = |\theta(f)|$.

On définit aussi l'homomorphisme $\nu : X^* \longrightarrow \mathbb{N}$ par :
$\nu(a) = \nu(b) = 1$ et $\nu(c) = 2$, *i.e.* $\nu(f) = \psi_1(f) + \psi_2(f)$.

On définit enfin l'homomorphisme $\pi : X_\#^* \longrightarrow \langle \mathbb{N}, + \rangle$ par :
$\pi(a) = 0$, $\pi(b) = 2$ et $\pi(c) = \pi(\#) = 1$.

Définition 4.1 *Soit f un mot de X^*. Pour tout entier k tel que $0 < k \leq \nu(f)$, on appelle* coefficient d'évolution de rang k *de f, noté $C_k(f)$, la valeur $\pi(\theta(f)_{\leq k})$.*

Exemple 4.1 *Les mots de $\mathfrak{L}(6,4)$ de la figure 4 ont pour coefficients d'évolution les valeurs du tableau suivant :*

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
aaacbbca	0	0	0	1	2	4	6	7	8	8
cacbcaa	1	2	2	3	4	6	7	8	8	8
bbaaaaaabb	2	4	4	4	4	4	4	4	6	8

A un mot f est donc attachée une suite finie d'entiers de longueur $\nu(f)$:
$(C_1(f), \ldots, C_{\nu(f)}(f))$. Réciproquement, cette suite caractérise le mot f.

Lemme 4.1 *Soit $(m_1, \ldots, m_p)$ une suite d'entiers. C'est la suite des coefficients d'évolution d'un mot $f \in X^*$ si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :*
(1) en posant $m_0 = 0$, $\forall k \leq p$, $0 \leq m_{k+1} - m_k \leq 2$
(2) si m_k est impair, alors $k < p$ et $m_{k+1} - m_k = 1$.

Démonstration :
Les conditions sont clairement nécessaires. La réciproque se fait par récurrence sur p :
Si $p = 1$, alors la condition (2) dit que m_1 est pair, et la condition (1) que $0 \leq m_1 \leq 2$. On a donc soit $m_1 = 0$, et le mot a a bien pour suite de coefficients d'évolution la suite (m_1), soit $m_1 = 2$, et c'est le mot b qui convient.
Supposons $p > 1$ et que la réciproque est vraie pour tout entier inférieur à p. La condition

(2) conjugée à $m_0 = 0$ implique que m_p est pair, et que si m_k est impair, alors m_{k-1} est pair.

• Si m_{p-1} est pair, soit f le mot qui, selon l'hypothèse de récurrence, a pour suite de coefficients d'évolution la suite $(m_1, \ldots, m_{p-1})$. De plus la condition (1) implique soit $m_p - m_{p-1} = 0$, et le mot fa a bien pour suite de coefficients d'évolution la suite $(m_1, \ldots, m_p)$, soit $m_p - m_{p-1} = 2$, et c'est le mot fb qui convient.

• Si m_{p-1} est impair, soit f le mot qui, selon l'hypothèse de récurrence, a pour suite de coefficients d'évolution la suite $(m_1, \ldots, m_{p-2})$. Les conditions (1) et (2) impliquent alors $m_{p-1} - m_{p-2} = 1$ et $m_p - m_{p-1} = 1$, et le mot fc a bien pour suite de coefficients d'évolution la suite $(m_1, \ldots, m_p)$. □

Remarquons que si $(m_1, \ldots, m_p)$ est la suite des coefficients d'évolution d'un mot $f \in X^*$, alors on a : $\psi(f) = (p - m_p/2, m_p/2)$. Deux suites de coefficients d'évolution sont donc les suites correspondant à deux mots qui sont dans la même classe si et seulement si elles ont même longueur et même dernière valeur.

On introduit une distance entre les mots d'une même classe.

Définition 4.2 *Sur $\mathfrak{L}(p,q)^2$, on définit la fonction à valeur numérique suivante :*

$$d(f,g) = \sum_{0 \le k \le p+q} |C_k(f) - C_k(g)|$$

Exemple 4.2 *Les mots de $\mathfrak{L}(6,4)$ de la figure 4 ont pour distances respectives :* $d(aaacbbca, cacbcaa) = 13$, $d(aaacbbca, bbaaaaaabb) = 22$ *et* $d(bbaaaaaabb, cacbcaa) = 17$

Cette fonction est clairement une distance. Elle représente l'aire comprise entre les deux chemins, et varie de 0 à $2.p.q$ par pas de 1 sur $\mathfrak{L}(p,q)$, l'unité d'aire prise ici étant le demi-carré.

Figure 5: l'unité d'aire

Pour des mots f et g congrus, comme les deux suites de coefficients d'évolution de ces deux mots sont de même longueur, on peut les ordonner en comparant les deux suites associées composante à composante :

Définition 4.3 *Soient f et g deux mots de X^* congrus. On dit que f est* en dessous *de g si, pour tout entier k tel que $0 < k \le \nu(f) = \nu(g)$, on a $C_k(f) \le C_k(g)$.*

La proposition cruciale est la suivante :

Proposition 4.1 $L_\varphi(f) = \{g \in [f] \mid f \textit{ est en dessous de } g\}$

Démonstration :

L'inclusion $L_\varphi(f) \subseteq \{g \in [f] \mid f \text{ est en dessous de } g\}$ se montre par récurrence sur le nombre de réécritures effectuées pour obtenir un mot $g \in L_\varphi(f)$ à partir de f, et découle de

	C_1	C_2
ab	0	2
c	1	2
ba	2	2

Prouvons l'inclusion inverse :

Pour cela, nous allons effectuer une récurrence sur la distance entre un mot de l'ensemble $\{g \in [f] \mid f$ est *en dessous* de $g\}$ et f lui-même.

Notons $\mathcal{S}_n(f) = \{g \in [f] \mid f \text{ est en dessous de } g \text{ et } d(f,g) \leq n\}$. Il nous faut prouver que pour tout entier n, $\mathcal{S}_n(f) \subseteq L_\varphi(f)$.

Soit $g \in [f]$ telque f est *en dessous* de g, et $n = d(f,g)$

— si n vaut 0, comme d est une distance, $g = f$ et on a bien $f \longrightarrow^* f$. Donc $\mathcal{S}_0(f) \subseteq L_\varphi(f)$ est vrai.

— supposons $n > 0$ et $\mathcal{S}_{n-1}(f) \subseteq L_\varphi(f)$ vrai. On considère alors le mot g' obtenu de la manière suivante :

• ou bien il existe dans g une occurrence d'une lettre c : $g = g_1cg_2$ telle que, si $\nu(g_1) = k$, $C_{k+1}(f) < C_{k+1}(g)$. Dans ce cas, on prend $g' = g_1abg_2$.

• ou bien ce n'est pas le cas. C'est donc qu'il existe dans g une occurrence de b : $g = g'bg''$ telle que, si $\nu(g_1) = r$, $C_{r+1}(f) < C_{r+1}(g)$. On considère alors la dernière occurrence de b parmi les b qui suivent immédiatement le b mis en évidence. Ce dernier b ne peut être suivi d'un c, sinon nous serions dans le premier cas. Il ne peut pas non plus être la dernière lettre de g, sinon on n'aurait pas $C_{\nu(f)}(g) = C_{\nu(f)}(f)$. Il est donc suivi d'un a, et on peut écrire $g = g_1bag_2$. Si $\nu(g_1) = k$, on prend $g' = g_1cg_2$.

On constate dans les deux cas que d'une part $g' \in [f]$, f est en dessous de g, et $d(f,g') < n$, et donc, selon l'hypothèse de récurrence, $f \longrightarrow^* g'$, et que d'autre part $g' \longrightarrow g$. On a donc bien $f \longrightarrow^* g$, et $\mathcal{S}_n(f) \subseteq L_\varphi(f)$ est vrai. $\square$

Nous pouvons maintenant prouver la proposition suivante :

Proposition 4.2 *La relation $\longrightarrow^*$ confère à $\mathfrak{L}(p,q)$ une structure de treillis.*

Démonstration :

Si l'on considère deux mots f et g congrus : $f \longleftrightarrow^* g$ avec $\nu(f) = \nu(g) = p$, alors on a $L_\varphi(f) \cap L_\varphi(g) \neq \emptyset$ puisque la relation $\longrightarrow^*$ est nœthérienne. Soit $h \in L_\varphi(f) \cap L_\varphi(g)$. La suite de coefficients d'évolution de h vérifie, pour tout entier k tel que $0 < k \leq p$: $C_k(f) \leq C_k(h)$ et $C_k(g) \leq C_k(h)$.

Posons donc, pour tout entier k tel que $0 < k \leq p$, $m_k = Max\{C_k(f), C_k(g)\}$. Il est facile de vérifier que la suite $(m_1, \ldots, m_p)$ satisfait bien les conditions du lemme 4.1. Soit donc $f \bigtriangledown g$ le mot qui a cette suite pour suite de cœfficients d'évolution. En vertu de la remarque qui suit ce lemme, ce mot est bien dans la classe de f.

Clairement, $\forall h \in L_\varphi(f) \cap L_\varphi(g)$, on a, pour tout entier k tel que $0 < k \leq p$, $m_k \leq C_k(h)$, *i.e.* $f \bigtriangledown g \longrightarrow^* h$ d'après la proposition 4.1. $f \bigtriangledown g$ est donc bien une borne supérieure sur $[f]$, et $\mathfrak{L}(p,q)$ a une structure de demi-treillis.

Par symétrie, $\longrightarrow^*$ confère à $\mathfrak{L}(p,q)$ une structure de treillis. □

On notera $f \bigtriangleup g$ la borne inférieure de f et g. Si $(m_1, \ldots, m_p)$ et $(n_1, \ldots, n_p)$ sont leurs suites de coefficients d'évolution associées respectives, elle a pour suite de coefficients d'évolution la suite $(Min\{m_i, n_i\})_{1 \leq i \leq \nu(f)}$.

Enonçons enfin notre résultat principal :

Proposition 4.3 *Le treillis* $\langle \mathfrak{L}(p,q), \longrightarrow^* \rangle$ *est distributif.*

Démonstration :

Les opérations se faisant composantes à composantes, la distributivité dans les entiers du Min et du Max l'un par rapport à l'autre entraîne le résultat. □

$\langle \mathfrak{L}(p,q), \longrightarrow^* \rangle$ étant un treillis distributif fini, le théorème de Birkhoff nous dit qu'il est le treillis des idéaux de ses éléments $\bigtriangledown$-irréductibles muni de l'inclusion ensembliste. Rappelons qu'un élément d'un treillis est $\bigtriangledown$-irréductible si et seulement si il ne peut provenir que d'un unique élément. La proposition suivante caractérise les éléments $\bigtriangledown$-irréductibles de $\langle \mathfrak{L}(p,q), \longrightarrow^* \rangle$.

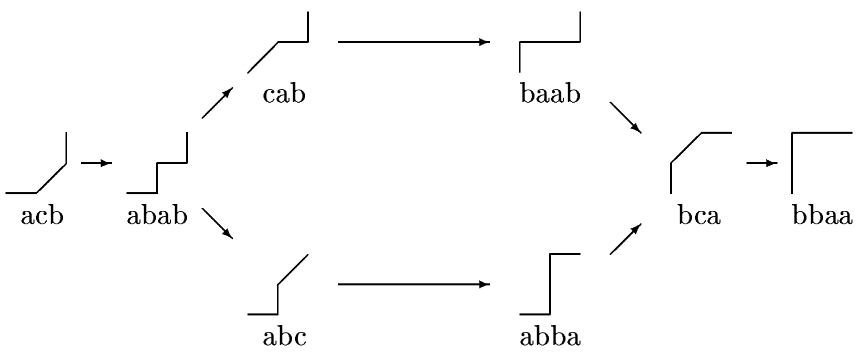
Proposition 4.4 $\langle \mathfrak{L}(p,q), \longrightarrow^* \rangle$ *est le treillis des idéaux du langage :* $\{a^{p-1}b^{q-1} \mid p > 0, q > 0\} \Cup \{c\} \cup \{a^{p-k}b^l a^k b^{q-l} \mid 0 < l \leq q, 0 < k \leq p\}$.

Démonstration :

Pour qu'un mot ne provienne que d'une seule dérivation, soit il ne contient qu'un seul c et pas de facteur ba, soit il ne contient pas de c et un seul facteur ba. □

Ce langage, que nous appelons *trame*, possède $2.p.q$ éléments qui sont disposés suivant une structure en *nid d'abeille* dès que $p \geq 2$ et $q \geq 2$. La trame de $\langle \mathfrak{L}(2,2), \longrightarrow^* \rangle$ est représentée figure 6. Nous présentons en Annexe les treillis $\mathfrak{L}(p,q)$ et leurs trames pour $2 \leq p \leq 5$ et $2 \leq q \leq 5$, lorsqu'ils n'ont pas déjà été traités.

Figure 6: La trame de $\mathfrak{L}(2,2)$



Références

[1] J. F. Allen, Maintaining Knowledge about Temporal Interval, *Comm. ACM* 26:11 (1983), p.832-843.

[2] J.-M. Autebert, *Langages Algébriques*, Masson, 1987.

[3] L. Comtet, *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions*, Reidel, p.80-81, 1974.

[4] H. Delannoy, Emploi de l'echiquier pour la résolution de certains problèmes de probabilités, Association Française pour l'Avancement des Sciences, Bordeaux, Vol. 24, pp. 70–90, 1895.

[5] M. Dubois et S.R. Schwer, Classification topologique des ensembles convexes de Allen, Procedings de R.F.I.A. 2000, Paris, p.59-68.

[6] C. Freska, Temporal reasoning based on semi-intervals, Artificial Intelligence 54 (1991), p.199-227.

[7] S. Ginsburg, *The Mathematical Theory of Context Free Languages*, McGraw-Hill, 1966.

[8] M. Jantzen, *Confluent string rewriting*, EATCS Monographs on Theoretical Computer Science **14**, Springer Verlag, 1988.

[9] G. Ligozat, On generalized interval calculi, *Proceedings of the AAAI, Anaheim, C.A.* (1991) p.234-240.

[10] L. Moser, King Paths on a Chessboard, Math. Gaz. **39** (1955) p.54.

[11] L. Moser and H. S. Zayachkowski, Lattice paths with diagonal steps, Scripta Math **26** (1963) p.223-229.

[12] S. R. Schwer, Dépendances temporelles : les mots pour le dire, Rapport interne du LIPN, 1997.

[13] S. R. Schwer, S-arrangements avec répétitions, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **334** (2002) 1-6.

[14] R. G. Stanton and D. D. Cowan, Note on a "square" functional equation, Siam Review, **12**, n.2, (1970) p.277-279.

[15] M. Vilain, A system for reasoning about time, *Proceedings of the AAAI*(1982) p.197-201.

[16] M. Vilain, H. Kautz, Constraint Propagation Algorithms for Temporal Reasoning, *Proceedings of the AAAI*(1986) p.377-382.

[17] E. W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRC Press, 2000.

A Annexe

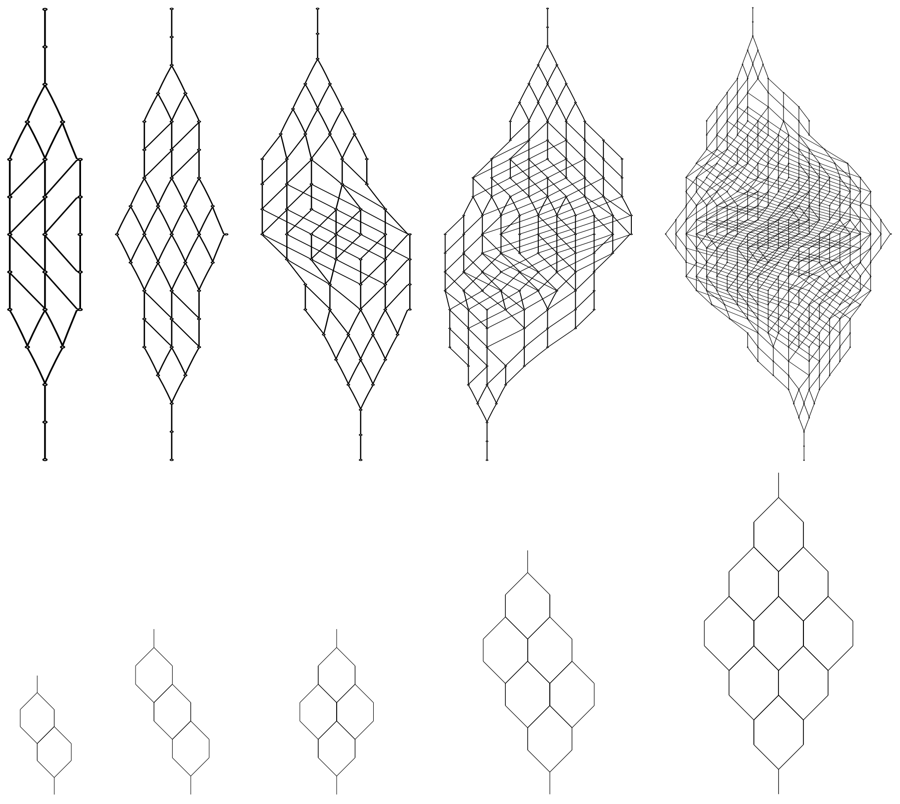


Figure 7: Les diagrammes des treillis $\mathfrak{D}(2,3)$, $\mathfrak{D}(2,4)$, $\mathfrak{D}(3,3)$, $\mathfrak{D}(3,4)$ et $\mathfrak{D}(4,4)$ (ligne du haut), avec leurs trames (ligne du bas).